4.Übung Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie 2 WS2012

1. Zeigen Sie: wenn F eine stetige Verteilungsfunktion ist, dann konvergiert die Folge (F_n) genau dann schwach gegen F, wenn sie gleichmäßig konvergiert.

2. Die Zufallsvariablen X_n mögen nur ganzzahlige Werte annehmen. Zeigen Sie, dass (X_n) genau dann in Verteilung gegen X konvergiert, wenn für alle x $\mathbb{P}(X_n = x) \to \mathbb{P}(X = x)$.

3. (a) Zeigen Sie: wenn X_n in Verteilung gegen X konvergiert und Y_n in Wahrscheinlichkeit gegen 0, dann konvergiert $X_n + Y_n$ in Verteilung gegen X.

   Insbesondere folgt aus der Konvergenz in Wahrscheinlichkeit die Konvergenz in Verteilung.

   (b) Zeigen Sie, dass die Folge X_n genau dann in Verteilung gegen 0 konvergiert, wenn sie in Wahrscheinlichkeit konvergiert.

4. X_n sei gammaverteilt mit der Dichte

$$f_n(x) = \frac{x^{n-1}}{\Gamma(n)} e^{-x}.$$

   (a) Bestimmen Sie die Dichte g_n von $Y_n = X_n^{1/c}$ und ihren Modus y_0 (d.h. $g_n(y_0) = \max_y g_n(y)$).

   (b) Bestimmen Sie die Taylorentwicklung von $\log(g_n)$ um y_0 und zeigen Sie so, dass $(Y_n - y_0)/\sigma_n$ mit $\sigma_n^2 = 1/(\log g_n)''(y_0)$ in Verteilung gegen eine Standardnormalverteilung konvergiert.

   (c) Bestimmen Sie c so, dass in der Taylorentwicklung aus dem vorigen Punkt das kubische Glied verschwindet.

5. X_n sei eine Folge von Zufallsvariablen und b_n eine Folge von positiven Zahlen mit $b_n \to 0$. Zeigen Sie: wenn $(X_n - a)/b_n$ in Verteilung gegen X konvergiert und f in a differenzierbar ist, dann konvergiert

$$(f(X_n) - f(a))/(f'(a)b_n)$$

   in Verteilung gegen X.

6. X sei betaverteilt mit der Dichte

$$f(x) = \frac{1}{\mathrm{B}(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}[0 \leq x \leq 1].$$

   Bestimmen Sie Erwartungswert μ und Varianz σ^2 von X und zeigen Sie, dass die Dichte von $(X - \mu)/\sigma$ gegen die einer Standardnormalverteilung konvergiert, wenn α und β gegen unendlich gehen und α/β gegen einen positiven endlichen Wert konvergiert.

7. (X_n) sei eine Folge von unabhängigen exponentialverteilten Zufallsvariablen mit Parameter 1.

   (a) Bestimmen Sie die Verteilung von $Y_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$

   (b) Zeigen Sie, dass $Y_n - \log(n)$ in Verteilung konvergiert und bestimmen Sie die Grenzverteilung (Gumbelverteilung, doppelte Exponentialverteilung).

   (c) Bestimmen Sie die momentenerzeugende Funktion dieser Verteilung.