5.Übung Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie 2 WS2012

1. Eine stabile Verteilung ist eine Verteilung, für die

$$\frac{X_1 + \ldots + X_n}{a_n}$$

So verteilt ist wie X_1, wenn die X_i unabhängig und identisch verteilt sind. Dann muss $a_n = n^{1/\alpha}$ $\alpha > 0$ sein (wenn X nicht gerade mit Wahrscheinlichkeit 1 konstant ist).

   (a) Zeigen Sie, dass
   $$\phi_X(t) = e^{-(a+b\mathrm{sig}(t))|t|^\alpha}.$$
   gilt.

   (b) Zeigen Sie, dass $\alpha \leq 2$ sein muss (betrachten Sie die Differenzierbarkeit von ϕ bei 0).

2. X_{nk} seien unabhängige ganzzahlige Zufallsvariable mit

$$\max_{k \leq n} \mathbb{P}(X_{nk} \neq 0) \to 0.$$

Zeigen Sie, dass $Y_n = \sum_{k \leq n} X_{nk}$ genau dann in Verteilung gegen eine Poissonverteilung mit Parameter λ konvergiert, wenn

$$\sum_{k \leq n} \mathbb{P}(X_{nk} = 1) \to \lambda$$

und

$$\sum_{k \leq n} \mathbb{P}(X_{nk} > 1) \to 0.$$

(Betrachten Sie $\mathbb{P}(Y_n = 0)$ und $\mathbb{P}(Y_n = 1)$).

3. Ein Würfel wird 100 mal geworfen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der Augenzahlen mehr als 375 beträgt.

4. Wie oft muss man würfeln, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, mindestens 100 Sechser zu erzielen, größer als 0.9 ist?

5. Zeigen Sie: wenn ϕ eine charakteristische Funktion ist, dann auch $\Re(\phi)$ und $|\phi|^2$.

6. Bestimmen Sie die charakteristische Funktion der Cauchyverteilung (Vgl. Bsp. 2, 3. Übung).

7. Die Stetigkeitskorrektur: bei diskreten Verteilungen (auf $\mathbb{Z}$ konzentriert) ist es oft genauer, wenn Wahrscheinlichkeiten der Form $\mathbb{P}(S_n \leq k)$ in die äquivalente Form $\mathbb{P}(S_n \leq k+1/2)$ umformuliert werden. Rechnen Sie Bsp. 3 und 4 mit dieser "Stetigkeitskorrektur".