6.Übung Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie 2 WS2012

1. Die kumulantenerzeugende Funktion einer Zufallsvariable X ist
$$K_X(t) = \log M_X(t).$$
Wenn M_X in einer Umgebung von 0 existiert, dann kann man K_X als Taylorreihe schreiben:
$$K_X(t) = \sum_n \frac{\kappa_n t^n}{n!}.$$
Die Koeffizienten κ_n heißen die Kumulanten von X. Drücken Sie κ_n, $n = 2, \ldots, 5$ durch die zentralen Momente von X aus (betrachten Sie die momentenerzeugende Funktion von $X - \mathbb{E}(X)$).

2. Wenden Sie den lokalen zentralen Grenzwertsatz auf $\mathbb{P}(X = n)$, wobei X eine Poissonverteilung mit Parameter n besitzt, an, und zeigen Sie so die Stirlingformel für $n!$.

3. Zeigen Sie den Satz von Lyapunov: X_n seien unabhängige Zufallsvariable mit Erwartungswert 0 und Varianz 1. Ferner sei $\mathbb{E}(|X_n|^3)$ beschränkt. Dann konvergiert die Verteilung von $S_n/\sqrt{n}$ gegen die Standardnormalverteilung.

4. Zeigen Sie: wenn $\phi_X(t) = 1$ für ein $t \neq 0$, dann nimmt X nur Werte der Form $2\pi n/t$, $n \in \mathbb{Z}$, an.

5. $X_1, \ldots$ seien unabhängig, identisch verteilte Zufallsvariable, N eine Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{N}$, die von $X_1, \ldots$ unabhängig ist. Bestimmen Sie die charakteristische Funktion von $S = \sum_{n \leq N} X_n$ allgemein und für den Spezialfall, dass N poissonverteilt ist (zusammengesetze Poissonverteilung).

6. Bestimmen Sie im vorigen Beispiel Erwartungswert und Varianz von S.

7. Bestimmen Sie die charakteristische Funktion der Multinomialverteilung:
$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, \ldots X_d = x_d) = \frac{n!}{\prod_i x_i!} \prod_i p_i^d [x_i \geq 0, \sum_i x_i = n].$$
(Dabei ist natürlich $p_i \geq 0$, $\sum_i p_i = 1$).