7.Übung Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie 2 WS2012

1. X_n sei exponentialverteilt mit Parameter n, $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Zeigen Sie:

   $$\mathbb{P}(S_n \leq x) = (1 - e^{-x})^n.$$

   Deshalb ist die Extremwertverteilung (mit der Verteilungsfunktion $e^{-e^{-x}}$) unendlich teilbar.

2. X und Y seien unabhängig mit Verteilungsfunktion $e^{-e^{-x}}$. Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion von $X - Y$. (logistische Verteilung)

3. Zeigen Sie, dass die stetige Gleichverteilung nicht unendlich teilbar ist.

4. Die negative Binomialverteilung kann auch für nicht ganzzahlige Werte des Parameters definiert werden:

   $$p_{\alpha,p}(x) = (1-p)^\alpha \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+x-1)}{x!} p^x.$$

   Zeigen Sie, dass es sich hier um eine unendlich teilbare Verteilung handelt.

5. (a) Zeigen Sie: wenn X und Y unabhängig sind, dann ist $X + Y$ genau dann integrierbar, wenn X und Y integrierbar sind (schätzen Sie $\mathbb{E}(|(X+Y) - Y|[|Y| < c])$ mit der Dreiecksungleichung nach oben ab).

   (b) Zeigen Sie, dass X genau dann integrierbar ist, wenn

   $$\int \frac{1 - |\phi_X(t)|^2}{t^2} d\lambda(t) < \infty.$$

6. Für welche Werte von α hat die stabile Verteilung mit Index α endlichen Erwartungswert bzw. endliche Varianz?

7. (schwaches Gesetz der großen Zahlen) X_n seien unabhängig und identisch verteilt. Zeigen Sie, dass

   $$\frac{1}{n} \sum_{k \leq n} X_k \to a$$

   genau dann, wenn

   $$\lim_{x \to \infty} x\mathbb{P}(|X| > x) = 0$$

   und

   $$\lim_{x \to \infty} \mathbb{E}(X[|X| \leq x]) = a.$$