8.Übung Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie 2 WS2012

1. Die geometrische Verteilung $\mathbb{P}(X = x) = pq^x, x = 0, \ldots$ ist (als Spezialfall der negativen Exponentialverteilung) unendlich teilbar. Zeigen Sie mithilfe der Taylorentwicklung für $\log(1+x)$, dass für das zugehörige Lévy-Maß μ gilt
$$\mu(\{n\}) = q^n/n.$$

2. Setzen Sie im vorigen Beispiel $q_n = e^{-\lambda/n}$. Wenn X_n mit Parameter q_n geometrisch verteilt ist, dann konvergiert X_n/n in Verteilung gegen eine Exponentialverteilung. Zeigen Sie, dass das Lévy-Maß μ für die Exponentialverteilung absolutstetig ist mit Dichte $e^{-\lambda x}/x$.

3. ϕ sei die charakteristische Funktion der Exponentialverteilung. Zeigen Sie, dass $\phi_n(t) = \phi(nt)/\phi((n-1)t)$ für $n \geq 1$ eine charakteristische Funktion ist und bestimmen Sie die zugehörige Verteilungsfunktion F_n.

4. Zeigen Sie: wenn eine charakteristische Funktion die Bedingung aus dem vorigen Beispiel erfüllt, dann gibt es eine Folge (X_n) von unabhängigen (nicht notwendig identisch verteilten) Zufallsvariablen, sodass S_n/n in Verteilung gegen die Verteilung mit dieser charakteristischen Funktion konvergiert.

5. Integrieren Sie
$$\int_0^\infty x^{\beta-1}e^{-xt} = \Gamma(\beta)t^{-\beta}, 0 < \beta < 1$$
nach t und setzen dann für $s > 0$ $t = -is = e^{-i\pi/2}s$. Damit ist $\mu([x,\infty)) = x^{-\alpha}, x > 0$ das Lévy-Maß für eine stabile Verteilung (mit $\mu((-\infty, 0)) = 0$). Bestimmen Sie die charakteristische Funktion dieser Verteilung (Anmerkung: damit kann man die Beschreibung der charakteristischen Funktion einer stabilen Verteilung ergänzen: für $0 < \alpha < 1$ gilt $\log\phi(t) = -a|t|^\alpha(1 + i\theta \mathrm{sig}(t)\tan(\pi\alpha/2))$ mit $|\theta| \leq 1$, eine zweite Integration gibt dasselbe Ergebnis für $\alpha > 1$, der Fall $\alpha = 1$ ist etwas komplizierter, hier ist der Tangens durch $2\log|t|/\pi$ zu ersetzen).

6. $(X_n, n \in \mathbb{N})$ sei eine Folge von unabhängig, identisch verteilten Zufallsvariablen mit der Dichte
$$f(x) = |x|^{-3}[|x| \geq 1].$$
Zeigen Sie, dass $S_n/(n\log n)$ in Verteilung gegen eine Standardnormalverteilung konvergiert.

7. μ sei ein endliches Maß auf $((1,\infty), \mathfrak{B})$ mit
$$\mu(cA) \leq \mu(A)$$
für alle $c \geq 1$. Zeigen Sie, dass μ absolutstetig ist und dass für $f = \frac{d\mu}{d\lambda}$ gilt, dass $xf(x)$ monoton nichtwachsend ist. (zeigen Sie zuerst $\mu((e^{n/m}, e^{(n+1)/m}]) \leq \mu((1,e])/m$ für $n \geq m$.