9.Übung Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie 2 WS2012

1. Zeigen Sie die folgende Verschärfung der Ungleichung von Markov: wenn für $t > 0$ $M_X(t)$ endlich ist, dann gilt
$$\lim_{x\to\infty} e^{tx}\mathbb{P}(X \geq x) = 0.$$

2. (X_n) sei eine Folge von unabhängigen identisch verteilten Zufallsvariablen, $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Zeigen Sie, dass
$$a_n = -\log \mathbb{P}(S_n > nx)$$
subadditiv ist und dass deshalb
$$\rho(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}$$
existiert.

3. Zeigen Sie, dass ρ aus dem vorigen Beispiel konvex ist. (zeigen Sie $\rho(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha\rho(x) + (1-\alpha)\rho(y)$ für rationales $\alpha \in [0,1]$, der allgemeine Fall folgt dann aus der Monotonie von ρ).

4. (X_n) sei eine Folge von unabhängigen identisch verteilten Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}(X_n) < 0$ und $\mathbb{P}(X_n > 0) > 0$. Die Momentenerzeugende Funktion $M_X(t)$ möge für alle $t > 0$ endlich sein. Es sei
$$Y_n = \max_{0\leq k\leq n} S_k$$
mit
$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i$$
und
$$Y = \lim_{n\to\infty} Y_n.$$
$t_0 > 0$ sei die (eindeutig bestimmte) Lösung von $M_X(t) = 1$. Zeigen Sie, dass für $0 < t < t_0$
$$M_Y(t) \leq \frac{1}{1 - M_X(t)}$$
gilt (verwenden Sie $e^{Y_n t} \leq \sum_{i\leq n} e^{S_i t}$).

5. Zeigen Sie im vorigen Beispiel, dass für $t \geq t_0$
$$\lim_{n\to\infty} M_{Y_n}^{1/n}(t) = M_X(t)$$
gilt.

6. Bestimmen Sie die Chernoff-Funktion für die Exponentialverteilung.

7. Bestimmen Sie die Chernoff-Funktion für die Binomialverteilung.