10.Übung Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie 2 WS2012

1. (Y_n) sei eine Folge von unabhängigen identisch verteilten Zufallsvariablen mit endlichem Erwartungswert und
$$X_0 = 1, X_n = \prod_{i=1}^{n} Y_i.$$
Wann ist (X_n) ein Martingal, Submartingal bzw. Supermartingal?

2. (X_n) sei eine Folge von unabhängigen identisch verteilten Zufallsvariablen mit endlichem Erwartungswert, $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Zeigen Sie, dass
$$(Y_n = \frac{S_N - S_n}{N - n}, 0 \leq n \leq N - 1)$$
ein Martingal bildet.

3. (a) (X_n) und (Y_n) seien Martingale bezüglich derselben Filtration, Zeigen Sie, dass $(X_n + Y_n)$ ebenfalls ein Martingal ist.
   (b) Geben Sie ein Beispiel für zwei Martingale (bezüglich ihrer natürlichen Filtrationen), deren Summe kein Martingal ist.

4. (X_n) sei eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen mit Erwartungswert 0 und endlicher Varianz und $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Zeigen Sie, dass $S_n^2 - \mathbb{E}(S_n^2)$ ein Martingal ist.

5. (X_n) sei eine Folge von unabhängigen nichtnegativen Zufallsvariablen mit endlichem Erwartungswert, $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Zeigen Sie, dass das Submartingal (S_n) auf zwei verschieden Arten als Summe eines Martingals und einer monotonen Folge dargestellt werden kann (wobei wir Darstellungen, die sich nur um eine additive Konstante unterscheiden, als gleich ansehen).

6. Der Galton-Watson Prozess: Y_{nk} seien unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariable, die nur nichtnegative ganzzahlige Werte annehmen, $m = \mathbb{E}(Y_{nk}) < \infty$ und
$$X_0 = 1, X_n = \sum_{i=1}^{X_{n-1}} Y_{ni}.$$
Zeigen Sie, dass $(m^{-n} X_n)$ ein Martingal ist.

7. (X_n) sei ein quadratintegrierbares Martingal und
$$Y_n = \sum_{i=1}^{n} (X_i - X_{i-1})^2.$$
Zeigen Sie, dass $X_n^2 - Y_n$ ein Martingal ist.