1. Übung aus Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie 2
WS 2013

1. Man zeige, dass auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $([0\,,1\,)\,\mathfrak{B}\cap[0,1),P)$ mit $P(\{\omega\}\,)=0\,,\ \forall\,\omega\in[0,1)$ die Transformationen $T_1(\omega):=\alpha\,\omega\,,$ $0<\alpha<1$ und $T_2(\omega):=\omega^2$ nicht maßtreu sein können.

2. Man zeige, dass $T(\omega):=m\,\omega \bmod 1:=m\,\omega-\lfloor m\,\omega\rfloor\,,m\in\mathbb{N}\,,\ m\geq 2$ auf $([0\,,1\,)\,\mathfrak{B}\cap[0,1),\lambda)$ maßtreu und mischend ist.

3. Bei einer Lotterie werden 50 000 Gewinne aus 100 000 Losen mit Zurücklegen gezogen. Die Lotterie bewirbt dieses Spiel mit dem Slogan: „*Jedes zweite Los gewinnt.*“ Ist diese Aussage korrekt? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für ein Los zu gewinnen? Wie groß ist die mittlere Anzahl von Gewinnen pro Los?

4. Man beweise, dass für eine Folge integrierbarer Funktionen X_n mit $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int|X_n|\,d\mu\ <\ \infty$ die Folge $\sum\limits_{n=1}^{N}X_n$ μ-fü gegen eine integrierbare Funktion X konvergiert und dass gilt
$$\sum_{n=1}^{\infty}\int X_n\,d\mu=\int X\,d\mu$$

5. Man zeige, dass aus $X_n\sim E_{X_{\lambda_n}}$ und $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n}<\infty$ folgt
$$\sum_{n=1}^{\infty}X_n<\infty\ P\text{ fs.}$$

6. Man beweise, dass für integrierbare Funktionen $g_n\ \leq\ f_n\ \leq\ h_n$ mit $\lim\limits_n g_n\ =\ g$ μ-fü, $\lim\limits_n f_n\ =\ f$ μ-fü und $\lim\limits_n h_n\ =\ h$ μ-fü, wobei g und h integrierbar sind, aus $\lim\limits_n\int g_n\,d\mu=\int g\,d\mu\ \wedge\ \lim\limits_n\int h_n\,d\mu=\int h\,d\mu$ folgt
$$\lim_n\int f_n\,d\mu=\int f\,d\mu\in\left[\int g\,d\mu\,,\int h\,d\mu\right]\,.$$

7. Sei $\{q_n:\ n\in\mathbb{N}\}$ eine Durchnummerierung der rationalen Zahlen. Welche der Fuktionen $f_n:=\mathbb{1}_{\{q_1,\ldots,q_n\}}\,,f:=\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ und $g:=\sum\limits_i 2^{-i}\,\mathbb{1}_{\{q_i\}}$ sind (uneigentlich) Riemann-integrierbar und/oder Lebesgue-integrierbar? Berechnen Sie die Integrale, sofern das sinnvoll ist. Was sagt das Beispiel über die Gültigkeit der Konvergenzsätze (Satz von Levi, bzw. Lebesgue) für Folgen Riemann-integrierbarer Funktionen aus?