3. Übung aus Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie 2
WS 2013

1. Man zeige, dass für jede Familie von Funktionen $X_t : \Omega \to \mathbb{R}\,,\ t \in T$ gilt
$$\mathfrak{S}(X_t : t \in T) = \bigcup_{S \subseteq T, |S| \leq \aleph_0} \mathfrak{S}(X_s : s \in S)\,.$$

2. Ist $f(\omega_1, \omega_2) := \begin{cases} 1, & 0 \leq \omega_1 < \infty\,,\ \omega_1 < \omega_2 \leq \omega_1 + 1 \\ -1, & 0 \leq \omega_1 < \infty\,,\ \omega_1 + 1 < \omega_2 \leq \omega_1 + 2 \end{cases}$ auf dem Maßraum $(\mathbb{R}^2\,, \mathfrak{B}_2\,, \lambda_2)$ integrierbar? Berechnen Sie die iterierten Integrale $\int \left[\int f(\omega_1, \omega_2)\, \lambda(d\omega_2)\right]\ \lambda(d\omega_1)$ und $\int \left[\int f(\omega_1, \omega_2)\, \lambda(d\omega_1)\right]\ \lambda(d\omega_2)\,.$

3. Man zeige, dass für eine Verteilungsfunktion F i.e.S. auf $\mathbb{R}$ gilt
$$\int (F(x+c) - F(x))\, \lambda(dx) = c\,,\ \forall\, c \in \mathbb{R}\,.$$

4. Man zeige, dass für die Kugeln $V_k(r) := \left\{(x_1, \ldots, x_k) : \sum\limits_{i=1}^{k} x_i^2 \leq r^2\right\}$ die Rekursion $\lambda_k(V_k(1)) = \frac{2\pi}{k}\, \lambda_{k-2}(V_{k-2}(1)\,)\,, k > 2$ gilt, aus der folgt
$$\lambda_{2k}(V_{2k}(1)) = \frac{(2\,\pi)^k}{\prod\limits_{i=1}^{k}(2\,i)}\,, \quad \lambda_{2k-1}(V_{2k-1}(1)) = \frac{2\,(2\,\pi)^{k-1}}{\prod\limits_{i=1}^{k}(2\,i-1)}\,. \tag{1}$$
Hinweis: Man berechne $\lambda_k(V_k(1))$ als Integral über die Volumina der Schnitte $V_k(1)_{(x_1,x_2)}$ und beachte, dass $V_k(r)$ durch eine lineare Transformation aus $V_k(1)$ hervorgeht.

5. Man zeige, dass das Null-Eins-Gesetz von Hewitt-Savage i.A. nicht gilt, wenn die Zufallsvariablen zwar unabhängig aber nicht identisch verteilt sind.

6. $f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{x^2-2\rho xy+y^2}{2(1-\rho^2)}} \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq \rho < 1$ ist die Dichte einer zweidimensionalen Normalverteilung. Man bestimme die Randdichten und die bedingten Dichten. Wann sind die beiden Komponenten unabhängig voneinander?
(Hinweis: Um die Randverteilung von X zu bestimmen, stellen Sie den Exponenten dar in der Form $-\frac{x^2}{2} - \frac{(y-\rho x)^2}{2(1-\rho^2)}$)

7. Für eine Folge (X_n) unabhängig, identisch verteilter Zufallsvariabler beweise man, dass mit $S_n := \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ gilt $P\left(\limsup\limits_n [S_n = 0]\right) \in \{0, 1\}$ und $\limsup\limits_n S_n = c$ P-fs. mit $c \in \overline{\mathbb{R}}$.