4. Übung aus Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie 2
WS 2013

1. $X_1, \ldots, X_n$ seien n unabhängige nach Ex_τ verteilte Zufallsvariable.
   (a) Man bestimme die Dichte von $S_n = X_1 + \ldots + X_n$.
   (b) Man berechne $P(S_n > t)$.
   (c) Eine Maschine enthält einen Verschleißteil dessen Lebensdauer Ex_τ verteilt ist. Der Teil wird bei einem Ausfall sofort ersetzt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dass der Teil in der Zeitspanne t genau n-mal ersetzt werden muss?

2. Man zeige, dass für unabhängige Zufallsvariable X, Y mit den Verteilungsfunktionen F, G aus $F(x-\varepsilon) < F(x+\varepsilon) \wedge G(y-\varepsilon) < G(y+\varepsilon)$ für alle $\varepsilon > 0$ für die Verteilungsfunktion H ihrer Summe $X+Y$ folgt
$$H(x+y-\varepsilon) < H(x+y+\varepsilon) \quad \forall\, \varepsilon > 0\,. \tag{1}$$
   Weiters zeige man
$$F_-(x) < F(x) \wedge G_-(y) < G(y) \;\Rightarrow\; H_-(x+y) < H(x+y)\,. \tag{2}$$

3. Man zeige, dass für unabhängige Zufallsvariable $X\,, Y$ mit den Verteilungsfunktionen $F\,, G$ die Summe $S := X+Y$ eine stetige Verteilungsfunktion H besitzt, wenn F oder G stetig ist, und dass aus $PX^{-1} \ll \lambda$ oder $PY^{-1} \ll \lambda$ folgt $PS^{-1} \ll \lambda$.

4. Man bestimme die Faltungsdichte von zwei unabhängigen Cauchy-verteilten Zufallsvariablen $X_1\,, X_2$. Welche Verteilung besitzt das Mittel $\bar{X}_{2^n} := \frac{1}{2^n} \sum_{i=1}^{2^n} X_i$, wenn die X_i unabhängig, Cauchy-verteilt sind?
   Hinweis: $\frac{1}{1+(s-t)^2}\,\frac{1}{1+t^2} = \frac{1}{s^4+4\,s^2}\left[\frac{s^2}{1+(s-t)^2} + \frac{2\,s\,(s-t)}{1+(s-t)^2} + \frac{s^2}{1+t^2} + \frac{2\,s\,t}{1+t^2}\right]$,
   und integrieren Sie zunächst über $[-x\,, x]$ mit $x \to \infty$.

5. Man zeige, dass durch $\zeta(A) := \begin{cases} |A|\,, & \text{für} |A| < \infty \\ -|A^c|\,, & \text{für} |A^c| < \infty \end{cases}$ auf der Algebra $\mathfrak{A} := \{A \subseteq \mathbb{R} : |A| < \infty \;\vee\; |A^c| < \infty\}$ eine σ-additive Mengenfunktion mit $\zeta(\emptyset) = \zeta(\mathbb{R}) = 0$ definiert wird, die aber nicht zu einem signierten Maß auf die von $\mathfrak{A}$ erzeugte σ-Algebra fortgesetzt werden kann.

6. Man beweise:

(a) Ist ν ein signiertes Maß auf einem Messraum $(\Omega\,,\mathfrak{S})$ so gilt

$$|\nu|(A) = \sup\left\{ \sum_{i=1}^{n} |\nu(A_i)| : \bigcup_{i=1}^{n} A_i \subseteq A \ \wedge \ A_i \cap A_j = \emptyset\,, \forall\, i \neq j \right\}.$$

(b) Sind μ und ν zwei signierte Maße und ist auch $\mu+\nu$ ein signiertes Maß (d.h. μ und ν nehmen entweder beide nicht den Wert $-\infty$ an oder beide nehmen ∞ nicht an), so gilt

$$|\mu + \nu| \leq |\mu| + |\nu|\,.$$

7. Ist μ auf einem Ring $\mathfrak{R}$ additiv mit $\mu(\emptyset) = 0$ und nach unten beschränkt, d.h. es gibt ein $K \in \mathbb{R}^+$, sodass $\mu(A) \geq -K \quad \forall\, A \in \mathfrak{R}$, dann gibt es 2 Inhalte μ^+ und μ^- auf $\mathfrak{R}$ mit $\mu = \mu^+ - \mu^-$.