5. Übung aus Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie 2
WS 2013

1. Gibt es auf $([0,1]\,,\mathfrak{B}\cap[0,1])$ eine Lebesgue-Zerlegung von ν bez. μ für
   (a) $\nu := \lambda\,, \mu(B) := \zeta(B) := |B| \quad \forall\, B \in \mathfrak{B}\cap[0,1]\,,$
   (b) $\nu := \zeta\,, \mu := \lambda\,,$
   (c) $\nu(B) := |B \cap A|\,, \mu(B) := |B \cap A^c|\,,\ A \in \mathfrak{B}\cap[0,1]\,,$
   (d) $\nu(B) := |B \cap A|\,, \mu(B) := |B \cap A^c|\,,\ A \notin \mathfrak{B}\cap[0,1]\,.$

2. Sei

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \ln x, & 1 \leq x < \mathrm{e} \\ \frac{x+6-3\,\mathrm{e}}{3-\mathrm{e}}, & \mathrm{e} \leq x < 3 \\ 4 & x \geq 3 \end{cases}$$

   (a) Man zeige, daß F eine Verteilungsfunktion i.w.S. ist.
   (b) Man bestimme das Maß folgender Mengen $\{0\}, \{\mathrm{e}\}, \mathbb{Q}, [1,\mathrm{e}], [1,\mathrm{e})$
   (c) Man bilde die Lebesgue-Zerlegung von μ_F bezüglich λ.
   (d) Man zeige, dass für zwei Maße $\mu\,,\nu$ gilt

$$\int f\, d(\mu+\nu) = \int f\, d\mu + \int f\, d\nu\,.$$

   (e) Man berechne $\int x^2 + \frac{1}{x}\,\mathbb{1}_{\mathbb{N}_0}(x)\, d\mu_F(x)\,.$

3. Sind ν_n und $\nu := \sum\limits_n \nu_n$ endliche Maße auf dem endlichen Maßraum $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ mit den Lebesgue-Zerlegungen $\nu_c \ll \mu\,, \nu_{n,c} \ll \mu\,, \nu_s \perp \mu\,, \nu_{n,s} \perp \mu\,,$ so gilt $\nu_c = \sum\limits_n \nu_{n,c} \ \wedge\ \nu_s = \sum\limits_n \nu_{n,s}$ sowie $\sum\limits_n \frac{d\nu_{n,c}}{d\mu} = \frac{d\nu_c}{d\mu}\,.$

4. Gegeben seien folgende Verteilungsfunktionen auf $\mathbb{R}$:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 0 \\ x & \text{falls } 0 \leq x < 1 \\ x+1 & \text{falls } 1 \leq x < 2 \\ 3 & \text{falls } x \geq 2 \end{cases} \qquad G(x) = \begin{cases} x & \text{falls } x < 1 \\ x^2 & \text{falls } 1 \leq x < 2 \\ 5 & \text{falls } x \geq 2 \end{cases}$$

   Bestimmen Sie die Lebesgue-Zerlegung von μ_G bezüglich μ_F sowie die Radon-Nikodym-Dichte $\frac{d\mu_G}{d\mu_F}$ des absolut stetigen Anteils.

5. Man zeige, dass auf $\mathfrak{S} := \{B \times \mathbb{R} :\ B \in \mathfrak{B}\ \}$ das Maß $\nu(B \times \mathbb{R}) := \lambda(B)$ absolut stetig bezüglich $\mu(B \times \mathbb{R}) := \lambda_2(B \times \mathbb{R})$ ist, dass es aber keine Dichte $\frac{d\nu}{d\mu}$ gibt. Widerspricht dies dem Satz von Radon-Nikodym ?

6. Sind $(\Omega_i, \mathfrak{S}_i, \mu_i) \quad i = 1,2$ zwei σ-endliche Maßräume, so zeige man, dass aus $\nu_i \ll \mu_i \quad i = 1,2$ folgt: $\nu_1 \otimes \nu_2 \ll \mu_1 \otimes \mu_2$, und dass dann gilt:
$$\frac{d\nu_1 \otimes \nu_2}{d\mu_1 \otimes \mu_2} = \frac{d\nu_1}{d\mu_1} \cdot \frac{d\nu_2}{d\mu_2}$$
7. Man zeige, dass auf einem σ-endlichen Maßraum $(\Omega\,, \mathfrak{S}\,, \mu)$ jedes σ-endliche, signierte Maß ν genau dann singulär zu μ ist, wenn kein signiertes Maß $\rho \neq 0$ existiert mit $|\rho| \leq |\nu| \ \wedge \ \rho \ll \mu\,.$