6. Übung aus Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie 2
WS 2013

1. Beweisen Sie, dass jede rechtsstetige Funktion $f \in \mathcal{BV}(a,b)$ die Differenz von zwei rechtsstetigen, monoton wachsenden Funktionen ist.

2. Man nennt einen Punkt $x \in A \subseteq \mathbb{R}$ einen Dichtepunkt von A, wenn gilt $\lim\limits_{h \searrow 0} \frac{\lambda^*(A \cap (x-h, x+h))}{2h} = 1$ (λ^* ist das äußere Lebesgue-Maß). Man beweise, dass jedes $A \in \mathfrak{L}$ bis auf eine λ-Nullmenge nur aus Dichtepunkten besteht.

   Hinweis: Man kann o.E.d.A. annehmen $A \subseteq [a,b]$, $a,b \in \mathbb{R}$ (warum?) $\lambda(A \cap [a,x]) = \int_{[a,x]} \mathbb{1}_A \, d\lambda$.

3. Man zeige, dass jedes $A \subseteq \mathbb{R}$ bis auf eine λ-Nullmenge nur aus Dichtepunkten besteht.

   Hinweis: Zu jedem $A \subseteq \mathbb{R}$ gibt es ein $A \subseteq B \in \mathfrak{L}$ mit $\lambda^*(A) = \lambda(B)$.

4. Ist (f_n) eine Folge monoton wachsender Funktionen auf $[a,b]$, für die gilt $f(x) := \sum\limits_n f_n(x) \in \mathbb{R} \quad \forall\, x \in [a,b]$, so zeige man, dass

   (a) $\sum\limits_n f_n' \leq f' \quad \lambda$-fü,

   (b) für die Teilfolge der Restsummen $r_{n_k} := \sum\limits_{n > n_k} f_n$ mit $r_{n_k}(b) \leq 2^{-k}$ $\forall\, k \in \mathbb{N}$ gilt $\sum\limits_k r_{n_k}' < \infty \quad \lambda$-fü (was folgt daraus für $\lim\limits_k r_{n_k}'$?),

   (c) $\sum\limits_n f_n' = f' \quad \lambda$-fü.

5. Man zeige, dass für 2 Zufallsvariable X, Y auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ gilt:

   (a) $0 < \alpha < \beta \Rightarrow (\mathbb{E}|X|^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \leq (\mathbb{E}|X|^\beta)^{\frac{1}{\beta}}$ (Ljapunoff-Ungleichung)

   (b) $X \geq 0, p > 0 \Rightarrow \frac{1}{(\mathbb{E}X)^p} \leq \mathbb{E}\frac{1}{X^p}$

6. Ist $P := (p_1, \ldots, p_m)$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\Omega := \{\omega_1, \ldots, \omega_m\}$, so beweise man, dass für jedes Maß $Q := (q_1, \ldots, q_m)$ mit $\sum\limits_{i=1}^m q_i \leq 1$ gilt

$$H(P) := \sum_{i=1}^m p_i \log \frac{1}{p_i} \leq \sum_{i=1}^m p_i \log \frac{1}{q_i} \quad \text{insbesondere} \quad H(P) \leq \log m\,.$$

7. Man suche einen σ-endlichen Maßraum mit $\mathcal{L}_p \subseteq \mathcal{L}_q \; \forall\, 1 \leq p \leq q \leq \infty$.