7. Übung aus Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie 2
WS 2013

1. Man zeige, dass für jede Zufallsvariable $X \in \mathcal{L}_n(\Omega, \mathfrak{S}, P)$, $n \in \mathbb{N}$, alle $c \in \mathbb{R}$ und $m \leq n$ gilt $\mathbb{E}(X-c)^m \leq 2^m \left(\mathbb{E}|X|^n + |c|^n\right)^{\frac{m}{n}}$.

2. Man suche eine Funktionenfolge (f_n) auf einem endlichen Maßraum $(\Omega\,,\mathfrak{S}\,,\mu)$, sodass zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, für das gilt $\mu(A) \leq \delta \quad \Rightarrow \quad \int_A |f_n|\,d\mu < \varepsilon$ aber $\sup\limits_n \int |f_n|\,d\mu = \infty$, und ebenso eine Folge mit $\sup\limits_n \int |f_n|\,d\mu < \infty$, die die obige $\varepsilon - \delta$- Bedingung nicht erfüllt.

3. Man suche eine Funktionenfolge (f_n) auf einem endlichen Maßraum $(\Omega\,,\mathfrak{S}\,,\mu)$, die gleichmäßig integrierbar ist, zu der es aber keine integrierbare Funktion g mit $g \geq |f_n| \quad \mu$-fü $\quad \forall\, n \in \mathbb{N}$ gibt.

4. Man zeige, dass auf einem endlichen Maßraum $(\Omega\,,\mathfrak{S}\,,\mu)$ für $f_n \in \mathcal{M}^+$ und $g_n := \max\limits_{1 \leq i \leq n} f_i$, gilt
$$\int\limits_{[g_n > c]} g_n\,d\mu \leq \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{[f_i > c]} f_i\,d\mu\,,$$
und $\int g_n\,d\mu = o(n)$, wenn die f_n gleichmäßig integrierbar sind.

5. Sind $\mathcal{F}\,,\mathcal{G}$ Familien mesbarer Funktionen auf einem Maßraum $(\Omega\,,\mathfrak{S}\,,\mu)$, so zeige man:
   (a) $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{L}_1 \;\wedge\; |\mathcal{F}| < \infty \;\Rightarrow\; \mathcal{F}$ ist gleichmäßig integrierbar,
   (b) $\mathcal{G}$ ist gleichmäßig integrierbar, wenn $\mathcal{F}$ gleichmäßig integrierbar ist und $\forall\, g \in \mathcal{G} \quad \exists\, f \in \mathcal{F} : \; |g| \leq |f| \quad \mu$-fü,
   (c) sind $\mathcal{F}\,,\mathcal{G}$ gleichmäßig integrierbar, so ist $\{f \vee g\,, f+g : \; f \in \mathcal{F}\,, g \in \mathcal{G}\}$ auch gleichmäßig integrierbar.

6. Für unabhängige Zufallsvariable $X\,,Y \sim B_p$ und $Z := \min\{1\,,X+Y\}$ bestimme man $\mathbb{E}\,(X\,|Z)$, $\mathbb{E}\,(Y\,|Z)$ und überprüfe, ob sie unabhängig sind.

7. Ist $(\Omega\,,\mathfrak{S}\,,P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{S}$ eine σ-Algebra, $1 \leq p$, $q := \frac{p}{p-1}$, $X \in \mathcal{L}_p(\Omega\,,\mathfrak{S}\,,P)$ und $Y \in \mathcal{L}_p(\Omega\,,\mathfrak{A}\,,P)$, so gilt
$$Y = \mathbb{E}(X|\mathfrak{A}) \;\Leftrightarrow\; \int Y\,Z\,dP = \int X\,Z\,dP \quad \forall\, Z \in \mathcal{L}_q(\Omega\,,\mathfrak{A}\,,P)\,. \quad (1)$$