8. Übung aus Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie 2
WS 2013

1. Für unabhängig identisch P_τ-verteilte Zufallsvariable X_n und ein davon unabhängiges $N \sim P_\gamma$ berechne man $P\left(\sum\limits_{n=1}^{N} X_n = 0\right)$.

2. Ist $(\Omega\,,\mathfrak{S}\,,P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $(\Omega'\,,\mathfrak{S}')$ ein Messraum und $X, Y, Z:\ ((\Omega,\mathfrak{S}) \to (\Omega',\mathfrak{S}'),\ f:(\Omega',\mathfrak{S}') \to (\mathbb{R},\mathfrak{B})$ mit $\mathbb{E}|f \circ X| < \infty$ und $\mathbb{E}|f \circ Y| < \infty$, so zeige man, dass aus $P(X,Z)^{-1} = P(Y,Z)^{-1}$ folgt $\mathbb{E}(f \circ X|Z) = \mathbb{E}(f \circ Y|Z)$.

3. Für die Zufallsvariablen $X\,,Y$ mit der Dichte $f(x,y) := \frac{1}{x}\,\mathbb{1}_{[0,1]}(x)\,\mathbb{1}_{[0,x]}(y)$ berechne man die bedingten Dichten $f_{X|Y}\,,f_{Y|X}$ und $\mathbb{E}(X|Y)\,,\mathbb{E}(Y|X)$.

4. Man zeige, dass für alle quadratisch integrierbaren Zufallsvariablen $X\,,Y$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega\,,\mathfrak{S}\,,P)$ und alle σ-Algebren $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{S}$ gilt $\mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X|\mathfrak{C})\,)^2 \le \mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X|\mathfrak{A})\,)^2$.

5. Man zeige, dass für $X\,,Y \in \mathcal{L}_2(\Omega\,,\mathfrak{S}\,,P)$ und jede σ-Algebra $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{S}$ aus $\mathbb{E}X^2 = \mathbb{E}Y^2$ und $\mathbb{E}(Y|\mathfrak{C}) = X \quad P$-fs. folgt $X = Y \quad P$-fs.

6. Man beweise, dass auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega,\mathfrak{S},P)$ für $X\,,Y \in \mathcal{L}_2(\Omega,\mathfrak{S},P)$ gilt
$$\mathbb{E}(X|Y) = Y\ P\text{-fs} \wedge\ \mathbb{E}(Y|X) = X\ P\text{-fs}\ \Rightarrow\ X = Y\ P\text{-fs}\,.$$

7. Man zeige, dass für eine Folge (X_n) unabhängig identisch verteilter Zufallsvariabler mit endlichem Erwartungswert $\mu := \mathbb{E}X$ und ein davon unabhängiges T mit Werten in $\mathbb{N}$ und $\tau := \mathbb{E}T < \infty$ gilt
$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{T} X_i \,\middle|\, T\right) = \mu\,T \quad \text{und} \quad \mathbb{E}\sum_{i=1}^{T} X_i = \mu\,\tau\,.$$

   Hinweis: Beachten Sie, dass Sie die Existenz von $\mathbb{E}\sum\limits_{i=1}^{T} X_i$ nachweisen müssen, damit die linke Gleichung oben Sinn macht.