9. Übung aus Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie 2
WS 2013

1. Für unabhängige $X_n \sim Ex_{\tau_n}$ gilt: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\tau_n} < \infty \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} X_n < \infty \quad P$-fs. und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\tau_n} = \infty \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} X_n = \infty \quad P$-fs.

2. Man beweise, dass für integrierbare Zufallsvariable $X\,, Y$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ gilt

$$\mathbb{E}(X|Y) = Y \ P\text{-fs} \wedge \ \mathbb{E}(Y|X) = X \ P\text{-fs} \ \Rightarrow \ X = Y \ P\text{-fs}\,.$$

   Hinweis: Was folgt aus $[Y \leq c] = [X > c, Y \leq c] \cup [X \leq c, Y \leq c]$ für die Integrale von $X - Y$ über diese Bereiche?

3. Man zeige, dass $\mathbb{E}(Y|\mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{A} \cup \mathfrak{C})\,) = \mathbb{E}\,(Y|\mathfrak{A})$ i.A. nicht gilt, wenn nur die σ-Algebren $\mathfrak{S}(Y)$ und $\mathfrak{A}$ unabhängig von der σ-Algebra $\mathfrak{C}$ sind.

4. Sind $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig, $B_{\frac{1}{2}}$- verteilte Zufallsvariable, so nennt man eine Folge $(X_{i+1}(\omega), \ldots, X_{i+k}(\omega))$ einen *Run* der Länge k, wenn $i = 0$ oder $X_i(\omega) \neq X_{i+1}(\omega)$, wenn weiters $X_{i+1}(\omega) = \ldots = X_{i+k}(\omega)$ und wenn $i + k = n$ oder $X_{i+k}(\omega) \neq X_{i+k+1}(\omega)$. Für $R(\omega)$, die Anzahl der *Runs* in $X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)$, berechne man $\mathbb{E}R$, $\operatorname{Var} R$, und versuche dann zu beurteilen, ob die Folge

   1010110100101100010110010101100010101001100101010 0

   durch das Werfen einer Münze entstanden ist, oder, ob es sich eher um eine willkürlich hingeschriebene Folge handelt.

5. Ein Würfel wird solange geworfen bis zum 3-ten Mal eine 6 erscheint. Die Anzahl der notwendigen Würfe soll erraten werden. Wie würden Sie tippen wenn
   (a) nur ein richtiger Tipp honoriert wird?
   (b) ein Pönale im Ausmaß der absoluten Differenz zwischen Ihrem Tipp und dem tatsächlichen Ausgang zu bezahlen ist?
   (c) ein Pönale im Ausmaß des Quadrats zwischen Ausgang und Tipp zu zahlen ist?

6. Falls $X\,, Y$ unkorrelierte Zufallsvariable sind, sind dann auch die transformierten Zufallsvariablen $\varphi(X)$ und $\eta(Y)$ unkorreliert? Wie verhält es sich bei linearen Transformationen $\varphi(x) = a\,x + b\,, \eta(y) = c\,y + d$?

7. Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz der folgenden Zufallsvariablen:

   (a) $X \sim B_{n,p}$ (Binomialverteilung)

   (b) $X \sim H_{A,N-A,n}$ (hypergeometrische Verteilung)

   (c) $X \sim {}_{neg}B_{n,p}$ (negative Binomialverteilung)

   (d) $X \sim E_{x_\tau}$ (Exponentialverteilung)

   (e) $X \sim Er_{n,\tau}$ (Erlangverteilung)

   (f) $X \sim P_\tau$ (Poissonverteilung)