10. Übung aus Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie 2
WS 2013

1. Die Anzahl von Druckfehlern auf einer Buchseite sei P_τ verteilt mit $\tau = 0.1$ und unabhängig von der Fehleranzahl auf anderen Seiten. Wieviele Druckfehler sind im Durchschnitt in einem 400 Seiten starken Buch zu erwarten. Erscheinen 80 Fehler in einem derartigen Buch nach obigen Annahmen plausibel?

2. Jede Ziffer der untenstehenden Folge wurde durch 4 Münzwürfe erzeugt und gibt die Anzahl der $Adler$ in diesen 4 Würfen an. Einige Ergebnisse wurden durch ein x überschrieben:

$$3x2302xx242112xxx224x322x4132x$$

   Sie sollen nun die ursprünglichen Resultate erraten. Wie sollten Sie tippen, um möglichst oft das tatsächliche Ergebnis zu erraten?

3. Man berechne den Erwartungswert einer Cauchy-verteilten Zufallsvariablen und erzeuge 10^6 Cauchy-verteilte Zufallszahlen $x_1, \ldots, x_{10^6}$ und stelle die Folge der Mittelwerte $\overline{x}_n = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$ abhängig von n graphisch dar. Was fällt Ihnen an der Folge der Mittelwerte auf? Außerdem bilde man von jeweils 100 000 Zufallszahlen die Stichprobenmittelwerte und vergleiche diese.

4. Ein Spieler soll auf die möglichen Werte $\Omega' := \{x_1, \ldots, x_m\}$ einer diskreten Zufallsvariablen X , die mit den Wahrscheinlichkeiten $PX^{-1} = (p_1, \ldots, p_m)$ angenommen werden wetten. Dabei beginnt er mit einem Startkapital S_0 , und er kann Anteile $0 \leq b_i \leq 1$, $1 \leq i \leq m$, $\sum\limits_{i=1}^{m} b_i = 1$ dieses Kapitals auf die einzelnen Werte setzen. Für den richtigen Tipp bekommt er das m-fache seines Einsatzes ausbezahlt, die Einsätze, die er auf andere Ausgänge gesetzt hat, gehen verloren. Bezeichnet X_1 den Ausgang des 1-ten Spiels, so verfügt er nach diesem Spiel über ein Kapital $S_1 = m\, b(X_1)\, S_0$, das er wieder im Verhältnis $b_1 : b_2 : \ldots : b_m$ aufteilen kann. Dieser Vorgang wird n-mal wiederholt.

   (a) Wie groß ist das Kapital S_n des Spielers nach n Runden?

   (b) Gegen welchen Wert wird $\frac{1}{n} \log S_n$ mit wachsendem n konvergieren?

   (c) Gegen welchen Wert wird $\frac{1}{n} \log S_n$ konvergieren, wenn der Spieler seine Anteile gemäß den Wahrscheinlichkeiten wählt, also $b_i = p_i$, $\forall\, 1 \leq i \leq m$?

(d) Welche Aufteilung ist optimal? Vergleichen Sie die Punkte 2. und 3. in Hinblick auf das Ergebnis von Bsp. 6 der 6-ten Übung.

(e) Wie sollte man aufteilen, um $\mathbb{E}S_1$ zu maximieren?

5. Gilt für die unabhängige Folge von Zufallsvariablen $(X_n)_{n\geq 2}$ mit
$$P(X_n = n) = P(X_n = -n) = \frac{1}{2n\log n},\; P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n\log n}$$
ein Gesetz der großen Zahlen?

6. Man berechne das Integral $I := \int_r^\infty \frac{1}{x}\,\tau\,\mathrm{e}^{-\tau\,x}dx \quad (\tau > 0)$ mit Hilfe des Gesetzes der großen Zahlen für $r = 10\,, \tau = 1\,.$ Schätzen Sie die für die Berechnung des Integrals benötigte Anzahl von Zufallszahlen ab, wenn das numerische Ergebnis mit einer Wahrscheinlichkeit von $\alpha := 0.99$ um nicht mehr als $\varepsilon := 10^{-2}$ bzw. $\varepsilon := 10^{-3}$ vom wahren Wert abweichen soll.

7. Man berechne für eine iid Folge von Zufallsvariablen $X_n \in \mathcal{L}_2(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ mit $\eta := \mathbb{E}X_n\,,\, \sigma^2 := \mathrm{Var}\,X_n$ und $\overline{X}_n := \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ den Erwartungswert der Stichprobenvarianz $S_n^2 := \frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_n\right)^2$, und zeige, dass gilt $\quad \lim\limits_n S_n^2 = \sigma^2 \quad P$-fs.