11. Übung aus Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie 2
WS 2013

1. Man zeige, dass für $b_0 := 0,\ b_n > 0\ \forall\ n \in \mathbb{N},\ b_n \nearrow \infty$ gilt:

   (a) $\lim\limits_n a_n = a \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_n \frac{1}{b_n} \sum\limits_{i=1}^{n} (b_i - b_{i-1})\, a_i = a.$

   (b) $\sum\limits_i a_i = s \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_n \frac{1}{b_n} \sum\limits_{i=1}^{n} b_i\, a_i = 0$, wobei man Punkt 1b. aus 1a. herleite.

2. Man zeige, dass für eine Folge von unabhängigen Ereignissen A_n mit $P(A_n) = \frac{1}{n}$ die Summen $S_n := \sum\limits_{i=2}^{n} \frac{\mathbb{1}_{A_i} - \frac{1}{i}}{\log i}$ P–fs konvergieren. Damit beweise man $\frac{1}{\log n} \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\mathbb{1}_{A_i} - \frac{1}{i}\right) \to 0$ P–fs und zeige schließlich $\frac{1}{\log n} \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A_i} \to 1$ P–fs.

3. Man zeige, dass eine maßtreue Transformation T auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ genau dann ergodisch ist, wenn

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} P\left(T^{-i}(A) \cap B\right) = P(A)\, P(B) \quad \forall\ A, B \in \mathfrak{A}, \tag{1}$$

   wobei $\mathfrak{A}$ eine Algebra ist, die $\mathfrak{S}$ erzeugt.

4. Ist $\mathfrak{A}$ eine Algebra mit $\mathfrak{S} = \mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{A})$, so sind die Punkte 4a. - 4c. äquivalent:

   (a) T ist ergodisch.

   (b) $P - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{i=0}^{n-1} \mathbb{1}_A \circ T^i = P(A) \quad \forall\ A \in \mathfrak{A}\,,$

   (c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{i=0}^{n-1} \mathbb{1}_A \circ T^i = P(A) \quad P\text{–fs} \quad \forall\ A \in \mathfrak{A}\,.$

5. Für eine auf $\mathbb{R}$ periodische Funktion f mit $f(\omega + 1) = f(\omega)\ \forall\ \omega \in \mathbb{R}$, die zudem auf $([0,1], \mathfrak{B} \cap [0,1], \lambda)$ integrierbar ist, berechne man

$$\lim_n \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(3^i\, \omega\right).$$

6. Man zeige, dass für jede ergodische Transformation T auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ gilt

$$\mathbb{E}X = \infty \quad \Rightarrow \quad \lim_n \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} X \circ T^i = \infty \ P\text{–fs.} \tag{2}$$

7. Man zeige mit Hilfe des Ergodensatzes, dass die relative Häufigkeit einer jeden Ziffer $0, \ldots, r-1$ in einem beliebigen r-adischen Zahlensystem $(r \geq 2)$ für jedes $\omega \in [0,1)$ λ–fü gegen r^{-1} konvergiert.