12. Übung aus Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie 2
WS 2013

1. Man zeige, dass $T(\omega) := (\omega + \alpha) \bmod 1$ auf $([0,1)\,, \mathfrak{B} \cap [0,1)\,, \lambda)$ maßtreu, aber für $\alpha \in \mathbb{Q}$ nicht ergodisch ist.

2. Man zeige, dass für $\alpha \in \mathbb{Q}^c$ und $T(\omega) := (\omega + \alpha) \bmod 1$ gilt:

   (a) $D_\omega := \{T^n(\omega) \,:\, n \in \mathbb{N}_0\}$ ist dicht in $[0,1) \quad \forall\, \omega \in [0,1)$.
   (Zeigen sie, dass die $T^n(\omega)$ alle verschieden sind, und folgern Sie daraus, dass es zu jedem $N \in \mathbb{N}$ Punkte $T^m(\omega)\,, T^{m+k}(\omega)$ gibt mit $d_N := \left|T^{m+k}(\omega) - T^m(\omega)\right| \leq \frac{1}{N}$. Gibt es weitere Punkte in D_ω mit dem Abstand d_N?)

   (b) Zu jedem $A \in \mathfrak{B} \cap [0,1)$ mit $\lambda(A) > 0$ und jedem $0 < \delta < 1$ gibt es ein Intervall $I := (a,b)\,,\ a < b$ mit $\lambda(A \cap I) \geq \delta\, \lambda(I)$.
   (siehe Beispiel 2. der 6-ten Übung)

   (c) Zeigen Sie, dass T auf $([0,1), \mathfrak{B} \cap [0,1), \lambda)$ ergodisch ist.
   (Zeigen Sie, dass für jedes $A \in \mathfrak{I}$ mit $\lambda(A) > 0$ gilt $\lambda(A) = 1$, indem Sie ein Intervall, das der Bedingung aus Punkt 2b. genügt, immer wieder gemäß Punkt 2a. geschickt drehen.)

3. Man zeige, dass für eine Folge (X_n) nichtnegativer, unabhängig identisch verteilter Zufallsvariabler mit $\mathbb{E}X_n = 1$ und $P(X_n = 1) < 1$ gilt

   (a) $(Y_n, \mathfrak{S}_n)$ mit $Y_n := \prod_{i=1}^{n} X_i$ und $\mathfrak{S}_n := \mathfrak{S}(X_1, \ldots, X_n)$ ist ein Martingal,

   (b) $\exists\, Y$ mit $Y = \lim_n Y_n$ P-fs und $\mathbb{E}Y \leq 1$,

   (c) $\lim_n \frac{1}{n} \ln Y_n = c$ P-fs mit $c < 0$,

   (d) $Y = 0$ P-fs.

   Hinweis: $P(Y > \varepsilon) > 0$ für $\varepsilon > 0$ führt auf einen Widerspruch zu Punkt c).

4. Aus einer Urne, die zunächst eine schwarze und eine weiße Kugel enthält wird immer wieder eine Kugel zufällig gezogen und durch 2 Kugeln der gleichen Farbe ersetzt. Sei X_n die Anzahl schwarzer Kugeln in der Urne vor der n-ten Ziehung und $Y_n := \frac{X_n}{n+1}$ ihr relativer Anteil (d.h. $X_1 = 1\,, Y_1 = \frac{1}{2}$). Man beweise nun,

   (a) dass gilt $P(X_n = k) = \frac{1}{n}\,, \quad 1 \leq k \leq n\,,$

   (b) dass $(\,Y_n\,, \mathfrak{S}(Y_1, \ldots, Y_n)\,)$ ein Doob-Martingal ist,

(c) dass für $Y := \lim_n Y_n$ gilt $Y \sim U_{0,1}$.

5. Ein Spieler beginnt mit einem Startkapital $S_0 := 1$ zu spielen. Ist S_{n-1} sein Kapital nach $n-1$ Runden, so kann er in der n-ten Runde einen Anteil $0 \leq B_n \leq 1$ seines bisherigen Kapitals einsetzen, wobei er unabhängig von den bisher gespielten Runden mit Wahrscheinlichkeit $p \in (0.5, 1)$ einen Gewinn in doppelter Höhe seines Einsatzes erhält und mit Wahrscheinlichkeit $q := 1-p$ leer ausgeht (der Einsatz verbleibt in beiden Fällen beim Spielbetreiber). Bezeichnet X_n den Ausgang des Glücksspiels der n-ten Runde ($X_n = 1$ bedeutet, dass der Spieler gewinnt, und $X_n = -1$, dass er verliert), so nimmt man an, dass der Spieler seinen Einsatz B_n nur auf Grund der bisherigen Ausgänge $X_1, \ldots, X_{n-1}$ festsetzen kann, dass die B_n also vorhersagbar sind bezüglich der Filtration $\mathfrak{S}_n := \mathfrak{S}(X_1, \ldots, X_n)$. Man zeige, dass, dann $\left(Y_n := \log \frac{S_n}{S_0} - n\,(\log 2 - H(p, 1-p)\,)\,, \mathfrak{S}_n \right)$ ein Supermartingal ist und deshalb gilt $\mathbb{E} \log \frac{S_n}{S_0} \leq n\,(\log 2 - H(p, 1-p))$. Kann man die B_n so wählen, dass das obige Supermartingal zum Martingal wird? Welche Strategie sollte der Spieler verfolgen?

6. Sei $S_0 := 1$ und S_k die Anzahl der Individuen der k-ten Generation einer Population, wobei gelten möge $P(S_k = 0 | S_{k-1} = 0) = 1$ und $S_k = \sum\limits_{i=1}^{n} Y_i$ für $S_{k-1} = n \in \mathbb{N}$. Dabei repräsentiere Y_i die Anzahl der Nachkommen des i-ten Individuums der $k-1$-ten Generation, und es sei angenommen, dass die Y_i unabhängig voneinander sind mit $P(Y_i = y) = p_y\,,\ y \in \mathbb{N}_0$ sowie $0 < \mu := \mathbb{E}\, Y_i = \sum\limits_y y\, p_y \quad \forall\ 1 \leq i \leq n$. Man zeige, dass dann $\left(\frac{S_k}{\mu^k}\,, \mathfrak{S}(S_0, \ldots, S_k) \right)$ ein Martingal bildet.

7. Beweisen Sie Kolmogoroffs 0-1-Gesetz, dass bei einer Folge unabhängiger Zufalsvariabler X_n für jedes terminale A gilt $P(A) = P(A)^2$, mit Hilfe von Resultaten der Martingaltheorie.
Hinweis: Man betrachte $\mathbb{E}(\mathbb{1}_A | \mathfrak{S}(X_1, \ldots, X_n)\,)$.