13. Übung aus Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie 2
WS 2013

1. Man zeige, dass für jede Filtation $(\mathfrak{A}_n)$ und jede Folge (X_n) von Zufallsvariablen mit $\lim\limits_n X_n = X$ P–fs und $|X_n| \leq Y \in \mathcal{L}_1$ P–fs für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt
$$\lim_n \mathbb{E}(X_n|\mathfrak{A}_n) = \mathbb{E}(X|\mathfrak{A}_\infty)\ P\text{–fs}\,. \tag{1}$$
Hinweis: Für $M_m := \sup\limits_{n\geq m} |X_n - X|$ gilt $\lim\limits_m M_m = \limsup\limits_n |X_n - X|$ und $M_m \searrow$. Auf welche Arten konvergiert (M_m)? Zeigen Sie weiters für $n \geq m$ gilt
$$|\mathbb{E}(X_n|\mathfrak{A}_n) - \mathbb{E}(X|\mathfrak{A}_\infty)| \leq |\mathbb{E}(X|\mathfrak{A}_n) - \mathbb{E}(X|\mathfrak{A}_\infty)| + \mathbb{E}(M_m|\mathfrak{A}_n).$$
Beweisen Sie nun *Hunts Lemma* d.h. Gleichung (1) mit Hilfe dieser Ungleichung und den Konvergenzaussagen über M_m.

2. Sind die $Z_i \sim B_{\frac{1}{2}}$ unabhängig, so kann man $X_i := 2^{i-1}\,(2\,Z_i - 1)$ als Nettogewinn des i-ten Spiels interpretieren, wenn man bei diesem Spiel € 2^{i-1} einsetzt, also in jedem Schritt seinen Einsatz verdoppelt.
   (a) Zeigen Sie $S_n := \sum\limits_{i=0}^{n} X_i$ und $\mathfrak{A}_n := \mathfrak{S}(X_1, \ldots, X_n)$ bilden ein Martingal.
   (b) Beweisen Sie $T := \min\{i: \ X_i > 0\}$ ist eine endliche Stoppzeit.
   (c) Man berechne S_T und $\mathbb{E}S_T$.
   (d) Man interpretiere $S_{T\wedge n}$ und berechne $S_{T\wedge n}$ sowie $\mathbb{E}S_{T\wedge n}$.
   (e) Man berechne $\liminf\limits_n \int_{[T>n]} |S_n|\, dP$, $\mathbb{E}\,|S_n|$ und $\sup\limits_n \mathbb{E}\,|S_n|$.

3. Man zeige, dass für zwei Stoppzeiten σ, τ gilt $\mathfrak{A}_{\sigma\wedge\tau} = \mathfrak{A}_\sigma \cap \mathfrak{A}_\tau$.

4. Man zeige, dass die Summe zweier zu einer Filtration $(\mathfrak{A}_t)_{t\geq 0}$ gehöriger Stoppzeiten σ und τ ebenfalls eine Stoppzeit ist.

5. Ist $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine unabhängige Folge mit $X_n := 2\,Y_n - 1,\ Y_n \sim B_{\frac{1}{2}}$, $X_0 := 0$, $S_n := \sum\limits_{i=0}^{n} X_i$, so zeige man, dass $\tau_{a,b} := \inf\{n: \ S_n \notin (-a, b)\}$ für $a, b \in \mathbb{N}$ eine endliche Stoppzeit zur Filtration $\mathfrak{A}_n := \mathfrak{S}(X_1, \ldots, X_n)$ bildet. Weiters berechne man $\mathbb{E}S_{\tau_{a,b}}$ und $P(S_{\tau_{a,b}} = a)$.
Hinweis: Was folgt aus $[X_1 = \cdots = X_{a+b} = 1] \subseteq [\tau_{a,b} \leq b + a]$ für $P(\tau_{a,b} > k\,(b + a))$? Zudem sehe man sich $(S_{\tau_{a,b}\wedge n})_{n\in\mathbb{N}}$ genau an.

6. Für eine unabhängige Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $X_n := 2\,Y_n - 1,\ Y_n \sim B_{\frac{1}{2}}$, $X_0 := 0,\ S_n := \sum\limits_{i=0}^{n} X_i$ und $\tau_{a,b} := \inf\{n:\ S_n \notin (-a,b)\}$ berechne man den Erwartungswert $\mathbb{E}\tau_{a,b}$ der Stoppzeit $\tau_{a,b}$.
Hinweis: Wenden Sie auf $(S_n^2 - n)$ den optionalen Stoppsatz an.

7. Man zeige, dass für ein Martingal $(X_n\,,\mathfrak{A}_n)$ mit $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} \mathbb{E}\,|X_n| < \infty$ gilt:

   (a) $\exists\, Y_n := \lim\limits_{k} \mathbb{E}(X_k^+|\mathfrak{A}_n)\ P$–fs $\quad \forall\, n$, und $(Y_n\,,\mathfrak{A}_n)$ ist ein Martingal.

   (b) (X_n) ist darstellbar als Differenz 2-er nichtnegativer Martingale.