14. Übung aus Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie 2
WS 2013

1. Man berechne
$$\lim_{n\to\infty} \int_{-3}^{2} \frac{e^x}{1+x^2} dF_n(x)$$
mit
$$F_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{nx} & \text{falls } x < 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{x^2}{4n} & \text{falls } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{falls } 1 \leq x \end{cases}$$

2. Man beweise, dass aus $X_n \Rightarrow X$ folgt: $\mathbb{E}|X| \leq \liminf_n \mathbb{E}|X_n|$.

3. Man zeige, dass für Verteilungsfunktionen i.e.S. $F_n\,, n \in \mathbb{N}$ und F gilt
$$(\,F \quad \text{ist stetig auf } \ \mathbb{R} \ \wedge \ F_n \Rightarrow F\,) \quad \Rightarrow \quad \lim_n \sup_{x\in\mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)| = 0\,.$$

4. Man zeige, dass für Zufallsvariable X_n mit $P(X_n \in \mathbb{Z}) = 1 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$ gilt
$$X_n \Rightarrow X \Leftrightarrow (\,P(X \in \mathbb{Z}) = 1 \wedge \lim_n P(X_n = z) = P(X = z) \quad \forall\, z \in \mathbb{Z}\,)\,.$$

5. Das Millionenrad der Brieflotterie besteht aus 80 Feldern. Auf 74 Feldern entfallen verschiedene Gewinnsummen x_i, die mitsamt der Wahrscheinlichkeit ihres Auftretens p_i in der folgenden Tabelle aufgelistet sind. Bleibt das Rad auf einem dieser Felder stehen, so erhält der Kandidat den entsprechenden Gewinn, und das Spiel ist beendet.

i	1	2	3	4	5	6	7
x_i	1Mio.	500 000	100 000	50 000	30 000	20 000	10 000
p_i	$\frac{3}{80}$	$\frac{6}{80}$	$\frac{11}{80}$	$\frac{20}{80}$	$\frac{9}{80}$	$\frac{15}{80}$	$\frac{10}{80}$

Sechs Felder sind sogenannte Verdopplungsfelder. Stoppt das Rad auf einem dieser Felder, so darf der Kandidat solange weiterspielen, bis das Rad schließlich auf einem der 74 Gewinnfelder zum Stillstand kommt, und der Spieler erhält das 2^{n-1}-fache des Gewinns, wenn das Glücksrad erst im n-ten Durchgang, auf einem Gewinnfeld hält. Jede Woche dürfen 3 Kandidaten an diesem Spiel teilnehmen. Wieviel Kapital muss der Spielbetreiber pro Jahr für die Gewinnausschüttung vorsehen, wenn diese Summe mit einer Wahrscheinlichkeit von $1 - \alpha = 0.9$, nicht überschritten werden soll?

6. Unter $2N + 1$ Personen wird eine Abstimmung über ein Projekt durchgefürt. n Personen sind für das Projekt der Rest ist gleichgültig und entscheidet mit der Wahrscheinlichkeit 0.5 für oder gegen das Projekt. Wie groß muss n sein damit die Befürworter mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.99 gewinnen. Berechnen Sie n konkret für N=500 000.

7. Ein Stadion hat 50 000 Sitzplätze. Erfahrungsgemäß werden 10% der Vorbestellungen storniert. Wieviele Vorbestellungen darf ein Veranstalter annehmen wenn eine überbuchung mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.99 vermieden werden soll.