Beispiel 13.27 (Poisson-Approximation der Binomialverteilung).
Auf $(\mathbb{N}_0, \mathfrak{P}(\mathbb{N}_0), \zeta)$ mit $\zeta(A) := |A|$ sind die f_n, definiert durch

$$f_n(\omega) := \begin{cases} \binom{n}{\omega} p_n{}^{\omega} (1-p_n)^{n-\omega}, & 0 \le \omega \le n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

mit $0 < p_n < 1 \quad \forall\, n$ Dichten von Binomialverteilungen B_{n,p_n} bezüglich ζ. Aus $\lim\limits_n n\,p_n = \theta > 0$ (d.h. die Erwartungswerte $n\,p_n$ der B_{n,p_n} konvergieren gegen eine Konstante θ) folgt $\lim\limits_n p_n = 0$ und man erhält

$$\lim_n f_n(\omega) = \lim_n \binom{n}{\omega} p_n{}^{\omega}(1-p_n)^{n-\omega} = \frac{1}{\omega!} \prod_{i=0}^{\omega-1} \lim_n \left[(n-i)\,p_n\right] \lim_n (1-p_n)^{n-\omega}$$
$$= \frac{\theta^\omega}{\omega!} \lim_n \mathrm{e}^{(n-\omega)\,\ln(1-p_n)} = \frac{\theta^\omega}{\omega!} \mathrm{e}^{\lim\limits_n [-p_n\,(n-\omega)]} = \frac{\theta^\omega}{\omega!}\,\mathrm{e}^{-\theta} \quad \forall\, \omega \in \mathbb{N}_0 .$$

Für $f(\omega) := \frac{\theta^\omega}{\omega!}\,\mathrm{e}^{-\theta} \quad \forall\, \omega \in \mathbb{N}_0$ gilt somit $\lim\limits_n f_n = f \quad \zeta$–fü.

Wegen $\int\limits_{\mathbb{N}_0} f\, d\zeta = \sum\limits_{\omega=0}^{\infty} \frac{\theta^\omega}{\omega!}\,\mathrm{e}^{-\theta} = \mathrm{e}^{\theta}\,\mathrm{e}^{-\theta} = 1$ ist das unbestimmte Integral P_θ von f ein Wahrscheinlichkeitsmaß, und daher folgt aus dem obigen Satz $\sup\limits_{A \subseteq \mathbb{N}_0} |\, B_{n,p_n}(A) - P_\theta(A)\,| \to 0$, wobei sich die Notation von selbst erklärt.

Die Grenzverteilung P_θ kennen wir bereits aus Beispiel 6.32, es ist die Poissonverteilung mit dem Parameter $\theta > 0$.

Wegen $\lim\limits_n n\,p_n = \theta$ sollte $X \sim P_\theta$ die Erwartung θ haben. Tatsächlich gilt

$$\mathbb{E}X = \sum_{x=0}^{\infty} x\,\frac{\theta^x}{x!}\,\mathrm{e}^{-\theta} = \theta \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\theta^{x-1}}{(x-1)!}\,\mathrm{e}^{-\theta} = \theta\,\mathrm{e}^{-\theta} \sum_{y=0}^{\infty} \frac{\theta^y}{y!} = \theta\,\mathrm{e}^{-\theta}\,\mathrm{e}^{\theta} = \theta .$$

Jedes unbestimmte Integral $\nu(A) := \int_A f\, d\mu$ auf einem Maßraum $(\Omega\,\mathfrak{S}, \mu)$ ist bekanntlich absolut stetig bezüglich μ. Ist f integrierbar lässt sich diese Aussage folgendermaßen verschärfen.

Lemma 13.28. *Ist $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ ein Maßraum und $f \in \mathcal{L}_1(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$, so gibt es für alle $\varepsilon > 0$ ein $c_\varepsilon > 0$ und ein $A_\varepsilon \in \mathfrak{S}$ mit $\mu(A_\varepsilon) < \infty$, sodass gilt*

$$\int\limits_{[|f| > c_\varepsilon]} |f|\, d\mu < \varepsilon \quad \textit{und} \quad \int\limits_{A_\varepsilon^c} |f|\, d\mu < \varepsilon . \tag{13.19}$$

Beweis. Da f integrierbar ist, gilt $f\,\mathbb{1}_{[|f|=\infty]} = 0 \;\; \mu$–fü. Daher folgt aus $\lim\limits_n |f|\,\mathbb{1}_{[|f|>n]} = f\,\mathbb{1}_{[|f|=\infty]} = 0$ und $|f|\,\mathbb{1}_{[|f|>n]} \le |f| \in \mathcal{L}_1 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$ nach dem Konvergenzsatz von Lebesgue (Satz 9.33) $\quad \lim\limits_n \int_{[|f|>n]} |f|\, d\mu = 0$.

Wegen $A_n := [|f| \ge \frac{1}{n}] \nearrow [|f| > 0]$ gilt $|f|\,\mathbb{1}_{A_n^c} \searrow |f|\,\mathbb{1}_{[|f|=0]}$. Da $|f|\,\mathbb{1}_{A_n^c} \le |f| \in \mathcal{L}_1 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$ folgt daraus $\lim\limits_n \int_{A_n^c} |f|\, d\mu = \int_{[|f|=0]} |f|\, d\mu = 0$. Zudem gilt $\frac{1}{n}\,\mu(A_n) \le \int |f|\, d\mu < \infty \;\Rightarrow\; \mu(A_n) \le n \int |f|\, d\mu < \infty \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Wie wir sehen werden, folgt aus der $\mathrm{L_p}$-Konvergenz, dass die beiden Ungleichungen in (13.19) gleichmäßig von allen Folgengliedern erfüllt werden. Dieses Konzept hat sich auch als äußerst nützlich in weiten Bereichen der Wahrscheinlichkeitstheorie erwiesen.

Definition 13.29. *Eine Familie $\{f_i\,,\ i \in I\}$ messbarer Funktionen auf einem Maßraum $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ heißt gleichmäßig integrierbar, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $c_\varepsilon > 0$ und ein $A_\varepsilon \in \mathfrak{S}$ mit $\mu(A_\varepsilon) < \infty$ gibt, sodass gilt*

$$\sup_i \int\limits_{[|f_i|>c_\varepsilon]} |f_i|\,d\mu < \varepsilon \quad \textit{und} \quad \sup_i \int\limits_{A_\varepsilon^c} |f_i|\,d\mu < \varepsilon\,. \tag{13.20}$$

Bemerkung 13.30. *Für $\mu(\Omega) < \infty$ ist die rechte Ungleichung in* (13.20) *wegen* $\int\limits_{\Omega^c=\emptyset} |f_i|\,d\mu = 0$ *stets erfüllt, und es genügt die linke Beziehung nachzuweisen.*

Satz 13.31. *Eine Familie messbarer Funktionen $\{f_i\,,\ i \in I\}$ auf einem Maßraum $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ ist genau dann gleichmäßig integrierbar, wenn eine der untenstehenden Bedingungen gilt (dann gelten natürlich alle)*

1. $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, g_\varepsilon \in \mathcal{L}_1^+ :\ \sup\limits_i \int_{[|f_i|>g_\varepsilon]} |f_i|\ d\mu < \varepsilon\,,$
2. $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, g_\varepsilon \in \mathcal{L}_1^+ :\ \sup\limits_i \int \left(|f_i| - g_\varepsilon\right)^+\ d\mu < \varepsilon\,,$
3. *a)* $\quad C := \sup\limits_i \int |f_i|\ d\mu < \infty$

   b) $\quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, g_\varepsilon \in \mathcal{L}_1^+, \delta > 0 :\ \int_A g_\varepsilon\,d\mu \le \delta \ \Rightarrow\ \sup\limits_i \int_A |f_i|\ d\mu < \varepsilon\,.$

Beweis. Sind die f_i gleichmäßig integrierbar, $\varepsilon > 0\,, c_\varepsilon > 0$ und $A_\varepsilon \in \mathfrak{S}$ mit $\mu(A_\varepsilon) < \infty$ und $\sup_i \int_{[|f_i|>c_\varepsilon]} |f_i|\,d\mu < \varepsilon \ \wedge\ \sup_i \int_{A_\varepsilon^c} |f_i|\,d\mu < \varepsilon$, so ist $g_\varepsilon := c_\varepsilon\,\mathbb{1}_{A_\varepsilon}$ klarerweise integrierbar, und es gilt

$$\begin{aligned}
\int\limits_{[|f_i|>g_\varepsilon]} |f_i|\ d\mu &= \int\limits_{[|f_i|>g_\varepsilon]\cap A_\varepsilon} |f_i|\ d\mu + \int\limits_{[|f_i|>g_\varepsilon]\cap A_\varepsilon^c} |f_i|\ d\mu \\
&\le \int\limits_{[|f_i|>c_\varepsilon]\cap A_\varepsilon} |f_i|\ d\mu + \int\limits_{A_\varepsilon^c} |f_i|\ d\mu \le \int\limits_{[|f_i|>c_\varepsilon]} |f_i|\ d\mu + \varepsilon \le 2\,\varepsilon\,.
\end{aligned}$$

Somit folgt Punkt 1. aus der Definition. Punkt 2. folgt aus 1. in trivialer Weise, da gilt $|f_i|\ \mathbb{1}_{[|f_i|>g_\varepsilon]} \ge \left(|f_i| - g_\varepsilon\right)^+ \ \Rightarrow\ \int_{[|f_i|>g_\varepsilon]} |f_i|\ d\mu \ge \int \left(|f_i| - g_\varepsilon\right)^+\ d\mu\,.$ Gilt nun gemäß Punkt 2. $\sup\limits_i \int \left(|f_i| - g_\varepsilon\right)^+\ d\mu < \varepsilon$ für $g_\varepsilon \in \mathcal{L}_1^+$, so folgt daraus

$$\begin{aligned}
\int |f_i|\ d\mu &= \int\limits_{[|f_i|>g_\varepsilon]} \left(|f_i| - g_\varepsilon\right)\ d\mu + \int\limits_{[|f_i|>g_\varepsilon]} g_\varepsilon\,d\mu + \int\limits_{[|f_i|\le g_\varepsilon]} |f_i| \\
&\le \int \left(|f_i| - g_\varepsilon\right)^+\ d\mu + \int\limits_{[|f_i|>g_\varepsilon]} g_\varepsilon\,d\mu + \int\limits_{[|f_i|\le g_\varepsilon]} g_\varepsilon\,d\mu \le \varepsilon + \int g_\varepsilon\,d\mu < \infty\ \forall\, i\,,
\end{aligned}$$

d.h. es gilt $C = \sup\limits_i \int |f_i| \; d\mu < \infty$. Zudem gilt für $A \in \mathfrak{S}$ mit $\int_A g_\varepsilon \, d\mu < \varepsilon$

$$\int\limits_A |f_i| \; d\mu = \int\limits_{A \cap [|f_i| > g_\varepsilon]} (|f_i| - g_\varepsilon) \; d\mu + \int\limits_{A \cap [|f_i| > g_\varepsilon]} g_\varepsilon \, d\mu + \int\limits_{A \cap [|f_i| \le g_\varepsilon]} |f_i| \; d\mu$$
$$\le \int (|f_i| - g_\varepsilon)^+ \; d\mu + \int\limits_{A \cap [|f_i| > g_\varepsilon]} g_\varepsilon \, d\mu + \int\limits_{A \cap [|f_i| \le g_\varepsilon]} g_\varepsilon \, d\mu \le \varepsilon + \int\limits_A g_\varepsilon \, d\mu < 2\,\varepsilon ,$$

d.h. Punkt 2. impliziert Punkt 3.
Es bleibt nur noch zu zeigen, dass die Definition aus Bedingung 3. folgt. Aber mit den Bezeichnungen und unter den Annahmen von Punkt 3. gilt für $a > \frac{C}{\delta}$

$$a \int\limits_{[|f_i| > a\, g_\varepsilon]} g_\varepsilon \, d\mu \le \int\limits_{[|f_i| > a\, g_\varepsilon]} |f_i| \; d\mu \le \int |f_i| \; d\mu \le C \quad \Rightarrow \quad \int\limits_{[|f_i| > a\, g_\varepsilon]} g_\varepsilon \, d\mu \le \delta \, .$$

Daraus folgt $\sup\limits_i \int_{[|f_i| > a\, g_\varepsilon]} |f_i| \; d\mu \le \varepsilon$, und damit Punkt 1, da $h := a\, g_\varepsilon \in \mathcal{L}_1^+$.
Zu h gibt es nach Lemma 13.28 ein $c_\varepsilon > 0$ und ein $A_\varepsilon \in \mathfrak{S}$ mit $\mu(A_\varepsilon) < \infty$, sodass $\int_{[h > c_\varepsilon]} h \, d\mu < \varepsilon$ und $\int_{A_\varepsilon^c} h \, d\mu < \varepsilon$. Damit gelten die Ungleichungen

$$\int\limits_{[|f_i| > c_\varepsilon]} |f_i| \, d\mu = \int\limits_{[h \ge |f_i| > c_\varepsilon]} |f_i| \, d\mu + \int\limits_{[|f_i| > h \vee c_\varepsilon]} |f_i| \, d\mu$$
$$\le \int\limits_{[h \ge |f_i| > c_\varepsilon]} h \, d\mu + \int\limits_{[|f_i| > h]} |f_i| \, d\mu \le \int\limits_{[h > c_\varepsilon]} h \, d\mu + \varepsilon \le 2\,\varepsilon \quad \forall\, i \in I ,$$

und

$$\int\limits_{A_\varepsilon^c} |f_i| \, d\mu = \int\limits_{[h \ge |f_i|] \cap A_\varepsilon^c} |f_i| \, d\mu + \int\limits_{[|f_i| \le h] \cap A_\varepsilon^c} |f_i| \, d\mu$$
$$\le \int\limits_{[h \ge |f_i|] \cap A_\varepsilon^c} h \, d\mu + \int\limits_{[|f_i| > h]} |f_i| \, d\mu \le \int\limits_{A_\varepsilon^c} h \, d\mu + \varepsilon \le 2\,\varepsilon \quad \forall\, i \in I ,$$

womit die gleichmäßige Integrierbarkeit der f_i bewiesen ist.

Satz 13.32. *Auf einem endlichen Maßraum $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ ist eine Familie messbarer Funktionen $\{f_i \, , \; i \in I\}$ genau dann gleichmäßig integrierbar, wenn die untenstehenden Bedingungen 1. und 3. oder 2. und 3. gelten.*

1. $C := \sup\limits_i \int |f_i| \; d\mu < \infty$.
2. $\lim\limits_{c \to \infty} \sup\limits_i \mu\,(\,|f_i| \ge c\,) = 0$.
3. $\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, \delta > 0 \; : \; \mu(A) < \delta \quad \Rightarrow \quad \sup\limits_i \int_A |f_i| \; d\mu < \varepsilon$, *d.h. die Maße $\nu_i(A) := \int_A |f_i| \; d\mu$ sind gleichmäßig absolut stetig bezüglich μ .*

Beweis. Dass für gleichmäßig integrierbare $(f_i)_{i\in I}$ Punkt 1. gilt wurde schon in Satz 13.31 Punkt 3a. gezeigt. Bedingung 1. impliziert aber Bedingung 2., da wegen Satz 13.9 (Markoff-Ungleichung) gilt

$$\mu\,(\,|f_i| \geq c\,) \leq \frac{1}{c}\int |f_i|\;d\mu \leq \frac{C}{c}\;\forall\, i \quad\Rightarrow\quad \lim_{c\to\infty}\sup_i \mu\,(\,|f_i| \geq c\,) \leq \lim_{c\to\infty}\frac{C}{c} = 0\,.$$

Wählt man zu $\varepsilon > 0$ ein $c_\varepsilon > 0$ so, dass $\sup\limits_i \int_{[|f_i|>c_\varepsilon]} |f_i|\;d\mu \leq \frac{\varepsilon}{2}$, dann folgt aus $\mu(A) \leq \delta := \frac{\varepsilon}{2\,c_\varepsilon}$

$$\int\limits_A |f_i|\;d\mu = \int\limits_{A\cap[|f_i|\leq c_\varepsilon]} |f_i|\;d\mu + \int\limits_{A\cap[|f_i|>c_\varepsilon]} |f_i|\;d\mu \leq c_\varepsilon\,\mu(A) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$$

Die gleichmäßige Integrierbarkeit impliziert demnach auch Punkt 3.

Gelten umgekehrt die Punkte 2. und 3. und wählt man c so, dass nach Punkt 2. gilt $\mu(\,|f_i| \geq c\,) < \delta \quad \forall\, i \in I$, so muss gemäß Punkt 3. für jedes $i \in I$ gelten $\sup\limits_j \int_{[|f_i|\geq c]} |f_j|\;d\mu < \varepsilon$. Daraus folgt $\int_{[|f_i|\geq c]} |f_i|\;d\mu < \varepsilon \quad \forall\, i \in I$, also die gleichmäßige Integrierbarkeit.

Klarerweise folgt die gleichmäßige Integrierbarkeit damit auch aus den Punkten 1. und 3., denn 2. ist schwächer als 1.

Bemerkung 13.33. *Nach Punkt 3a. von Satz 13.31 sind natürlich alle Funktionen einer gleichmäßig integrierbaren Familie $\{f_i\,,\; i \in I\}$ integrierbar.*

Das Lemma von Fatou und der Satz über die Konvergenz durch Majorisierung können für gleichmäßig integrierbare Folgen verallgemeinert werden.

Satz 13.34. *Ist (f_n) eine Folge gleichmäßig integrierbarer Funktionen auf einem Maßraum $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$, so gilt*

1. $\int \liminf\limits_n f_n\,d\mu \leq \liminf\limits_n \int f_n\,d\mu \leq \limsup\limits_n \int f_n\,d\mu \leq \int \limsup\limits_n f_n\,d\mu\,,$
2. *aus* $f_n \xrightarrow{\mu} f$ *oder* $\lim\limits_n f_n = f$ μ–fü *folgt* $f \in \mathcal{L}_1\,,\; \lim\limits_n \int f_n\,d\mu = \int f\,d\mu$ *und* $\lim\limits_n \|f_n - f\|_1 = 0\,.$

Beweis. Wählt man für $\varepsilon > 0$ ein $g \in \mathcal{L}_1^+$ mit $\sup\limits_n \int_{[|f_n|>g]} |f_n|\;d\mu < \varepsilon$, so gilt

$$\int f_n\,d\mu = \int\limits_{[f_n>-g]} f_n\,d\mu + \int\limits_{[f_n\leq -g]} f_n\,d\mu \geq \int\limits_{[f_n>-g]} f_n\,d\mu - \varepsilon \quad \forall\, n \in \mathbb{N}\,. \tag{13.21}$$

Aber für $\widetilde{f}_n := f_n\,\mathbb{1}_{[f_n>-g]} \geq -g$ gilt nach Folgerung 9.32 (Lemma von Fatou)

$$\int \liminf_n \widetilde{f}_n\,d\mu \leq \liminf_n \int \widetilde{f}_n\,d\mu \leq C := \sup_n \int |f_n|\;d\mu < \infty\,. \tag{13.22}$$

Da $f_n \leq \widetilde{f}_n$, gilt $\liminf\limits_n f_n \leq \liminf\limits_n \widetilde{f}_n$, woraus mit (13.21) und (13.22) folgt

$$\int \liminf_n f_n \, d\mu \leq \int \liminf_n \widetilde{f}_n \, d\mu \leq \liminf_n \int \widetilde{f}_n \, d\mu \leq \liminf_n \int f_n \, d\mu + \varepsilon \, .$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, impliziert das die linke Ungleichung in Punkt 1. Unter Berücksichtigung von $-\liminf\limits_n(-f_n) = \limsup\limits_n f_n$ ergibt sich daraus, angewendet auf $(-f_n)$ die rechte Ungleichung in Punkt 1.

Aus $\lim\limits_n f_n = f \;\; \mu$–fü folgt $\lim\limits_n |f_n| = |f| \;\; \mu$–fü, und Punkt 1. darauf angewendet ergibt $\|f\|_1 = \lim\limits_n \|f_n\|_1 \leq C < \infty \quad \Rightarrow \quad f \in \mathcal{L}_1$. Das impliziert nach Satz 13.25 $\lim\limits_n \|f_n - f\|_1 = 0$. Daraus folgt bekanntlich $\lim\limits_n \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu$.

Konvergiert (f_n) hingegen im Maß gegen f, so gibt es nach Satz 7.88 eine Teilfolge (f_{n_k}) mit $\lim\limits_k f_{n_k} = f \quad \mu$–fü, woraus, wie eben gezeigt, folgt $\lim\limits_k \|f_{n_k} - f\|_1 = 0$. Würde f_n nicht im Mittel gegen f konvergieren, so müsste es ein $\varepsilon > 0$ und eine Teilfolge $\left(f_{m_j}\right)$ mit $\left\|f_{m_j} - f\right\|_1 > \varepsilon$ für alle $j \in \mathbb{N}$ geben. Da aber auch $\left(f_{m_j}\right)$ im Maß gegen f konvergiert, müsste eine Subfolge $\left(f_{m_{j_h}}\right)$ von $\left(f_{m_j}\right)$ existieren mit $\lim\limits_h \left\|f_{m_{j_h}} - f\right\|_1 = 0$. Das widerspricht der Definition von $\left(f_{m_j}\right)$, also gilt $\lim\limits_n \|f_n - f\|_1 = 0$.

Wir können nun Vitalis Kriterium für die $\mathrm{L_p}$-Konvergenz formulieren.

Satz 13.35. *Auf einem Maßraum $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ konvergiert eine Folge (f_n) aus $\mathcal{L}_p, 1 \leq p < \infty$ genau dann im p-ten Mittel, wenn die $|f_n|^p$ gleichmäßig integrierbar sind und (f_n) im Maß konvergiert.*

Beweis. Konvergiert (f_n) im p-ten Mittel, so gibt es nach Satz 13.25 ein $f \in \mathcal{L}_p$, sodass $\lim\limits_n \|f_n - f\|_p = 0$ und $\lim\limits_n \|f_n\|_p = \|f\|_p < \infty$. Daraus folgt $\mu - \lim f_n = f$ und $C := \sup\limits_n \int |f_n|^p \, d\mu < \infty$.

Zu $\varepsilon > 0$ existiert ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$, sodass $\|f_n - f\|_p \leq \frac{\varepsilon^{\frac{1}{p}}}{2} \quad \forall \; n > n_\varepsilon$. Für $g := |f|^p + \sum\limits_{i=1}^{n_\varepsilon} |f_i|^p \in \mathcal{L}_1^+$ gilt $\int_A g \, d\mu < \frac{\varepsilon^{\frac{1}{p}}}{2} \quad \Rightarrow \quad \int_A |f_n|^p \, d\mu < \varepsilon \quad \forall \, n \leq n_\varepsilon$.

Aus $\|f_n \mathbb{1}_A\|_p \leq \|(f_n - f) \mathbb{1}_A\|_p + \|f \mathbb{1}_A\|_p$ folgt für $n > n_\varepsilon$ aus $\int_A g \, d\mu < \frac{\varepsilon^{\frac{1}{p}}}{2}$ ebenfalls $\int_A |f_n|^p \, d\mu < \varepsilon$. Daher ist $(|f_n|^p)$ nach Satz 13.31 Punkt 3. gleichmäßig integrierbar.

Sind umgekehrt die $|f_n|^p$ gleichmäßig integrierbar und im Maß konvergent, so gibt es nach Satz 7.88 ein $f \in \mathcal{M}$ und eine Teilfolge (f_{n_k}) mit $\lim\limits_k f_{n_k} = f \quad \mu$–fü $\quad \Rightarrow \quad \lim\limits_k |f_{n_k}|^p = |f|^p \quad \mu$–fü. Da die $(|f_{n_k}|^p)$ gleichmäßig integrierbar sind, folgt nach Satz 13.34 Punkt 2. $\lim\limits_k \|f_{n_k}\|_p = \|f\|_p$ mit $\|f\|_p < \infty$. Nach Satz 13.24 gilt dann auch $\lim\limits_k \|f_{n_k} - f\|_p = 0$.

Würde $\|f_n - f\|_p$ nicht gegen 0 konvergieren, so müsste es ein $\varepsilon > 0$ und eine Teilfolge (f_{m_j}) mit $\left\|f_{m_j} - f\right\|_p > \varepsilon \quad \forall\ j \in \mathbb{N}$ geben. Aber wegen $\mu - \lim\limits_j f_{m_j} = f$ müsste eine Subfolge $\left(f_{m_{j_h}}\right)$ von (f_{m_j}) existieren mit $\lim\limits_h \left\|f_{m_{j_h}} - f\right\|_p = 0$. Das ist ein Widerspruch, also gilt $\lim\limits_n \|f_n - f\|_p = 0$.

Bemerkung 13.36. *Konvergiert eine Folge* $\mathrm{L_p}$*-integrierbarer Funktionen* f_n *auf einem endlichen Maßraum im Maß, so sind die* $|f_n|^p$ *auf Grund der Sätze 13.25 und 13.35 genau dann gleichmäßig integrierbar, wenn die Grenzfunktion* f $\mathrm{L_p}$*-integrierbar ist und gilt* $\lim\limits_n \|f_n\|_p = \|f\|_p < \infty$.

13.4 Der Dualraum zu $L_p(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$

In diesem Abschnitt wird gezeigt, dass der Dualraum (siehe Definition A.73) zu $\mathbf{L}_p(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$, $\quad 1 \leq p < \infty$ gerade der Raum $\mathbf{L}_q(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ist.

Für $1 < p < \infty$ gilt dies auf beliebigen Maßräumen und für $p = 1$, wenn das Maß σ-endlich ist. Wir beweisen zunächst ein paar Hilfssätze.

Lemma 13.37. *Ist* $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ *ein Maßraum, so gibt es zu* $f \in \mathcal{L}_p$, $1 \leq p \leq \infty$ *eine Folge* (t_n) *aus* $\mathfrak{T}(\Omega, \mathfrak{S})$ *mit* $\|t_n\|_p \leq \|f\|_p \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$ *und* $\lim\limits_n \|f - t_n\|_p = 0$.

Beweis. Für die im Beweis von Satz 7.30 konstruierte Folge (t_n) gilt offensichtlich $|t_n| \leq |f| \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$ und $\lim\limits_n t_n = f \quad \mu$–fü. Daraus folgt klarerweise $\|t_n\|_p \leq \|f\|_p$, $1 \leq p \leq \infty$ und $|f - t_n|^p \leq (2\,|f|)^p$ sowie $\lim\limits_n |f - t_n|^p = 0$ μ–fü für $1 \leq p < \infty$. Somit impliziert der Satz über die Konvergenz durch Majorisierung $\lim\limits_n \|f - t_n\|_p = 0$ für $1 \leq p < \infty$.
Ist $p = \infty$, so konvergieren die t_n bekanntlich gleichmäßig gegen f, sodass in diesem Fall $\lim\limits_n \|f - t_n\|_\infty = 0$ trivialerweise gilt.

Lemma 13.38. *Ist* $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ *ein Maßraum,* $p \in (1, \infty)$ *und* $q := \frac{p}{p-1}$, *d.h.* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, *so wird zu jedem* $g \in \mathbf{L}_q(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ *durch*

$$T_g(f) := \int f\,g\;d\mu\,, \quad f \in \mathbf{L}_p(\Omega, \mathfrak{S}, \mu) \tag{13.23}$$

ein beschränktes, lineares Funktional auf $\mathbf{L}_p(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ *mit* $\|T_g\| = \|g\|_q$ *definiert. Ist* μ σ*-endlich, so gilt die obige Aussage auch für* $p = 1$ *und* $q = \infty$.

Beweis. Ist $p = 1, q = \infty$, $f \in \mathbf{L}_1$ und $g \in \mathbf{L}_\infty$, so gilt offensichtlich $|T_g(f)| \leq \int |f|\,|g|\,d\mu \leq \int |f|\,\|g\|_\infty\,d\mu \leq \|g\|_\infty\,\|f\|_1 \;\Rightarrow\; \|T_g\| \leq \|g\|_\infty$.
Um $\|T_g\| \geq \|g\|_\infty$ zu zeigen, nehmen wir zunächst $\mu(\Omega) < \infty$ an. Dann sind die Funktionen $g_M := (\operatorname{sgn} g)\,\mathbb{1}_{[\,|g| \geq M\,]}$, $\quad M \geq 0$ wegen $|g_M| \leq 1$ integrierbar, und es gilt $|g_M| = \mathbb{1}_{[\,|g| \geq M\,]}$, sowie $\|g_M\|_1 = \mu(\,|g| \geq M\,)$. Daraus folgt