ÜBUNGSBLATT 1

1) Die Stochastischen Größen $X, Y \in \mathscr{L}^\infty(\mathbf{P})$ haben gleiche Momente

$$\mathbb{E}X^n \;=\; \mathbb{E}Y^n \qquad \forall n \in \mathbb{N}\;.$$

Man zeige, dass dann auch für jede integrierbare stetige Funktion f die Erwartungen übereinstimmen

$$\mathbb{E}f(X) \;=\; \mathbb{E}f(Y)\;.$$

Hinweis: Der *Approximationssatz von Weierstraß* für stetige Funktionen auf endlichen Intervallen soll angewandt werden

2) Unter den Voraussetzungen des letzten Beispiels zeige man, dass dann die Verteilungen von X und Y ident sind.

3) Die Zufallsvariable $X = (X_1, X_2)$ ist auf dem Einheitskreis stetig gleichverteilt, die Dichte von X auf $(\mathbb{R}^2, \mathfrak{B}_2, \lambda_2)$ ist also $f = \frac{1}{\pi}\mathbb{1}_K$ für $K = \{(x,y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$.

a) Man bestimme die Randdichte von X und die bedingte Dichte von $X|Y$,

b) Man berechne die Verteilungsfunktion, Dichte und den Erwartungswert $\mathbb{E}R$ für den Abstand vom Ursprung

$$R \;=\; \sqrt{X_1^2 \;+\; X_2^2}.$$

4) Die stochastische Größe $X \sim N(\mu, \Sigma)$ sei $k-$dimensional normalverteilt auf $(\mathbb{R}^k, \mathfrak{B}^k, \lambda_k)$ mit der Dichte

$$f(x) \;=\; \frac{1}{(2\pi)^{k/2}\sqrt{det\Sigma}}\;\exp\{-\frac{1}{2}(x-\mu)^\top\Sigma^{-1}(x-\mu)\}$$

Man bestimme die Verteilung (Dichte) der stochastischen Größe $Y := MX + b$ für eine reguläre Matrix $M \in \mathbb{R}^{k\times k}$ und den Vektor $b \in \mathbb{R}^k$.

5) Für eine die bivariate Normalverteilung $N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$ mit der Dichte

$$f(x,y) = c_N \exp[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\{\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\}]$$

mit

$$c_N = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}.$$

sollen die Randdichten von X und Y bestimmt werden.

6) Die diskret verteilten Stochastischen Größen X_1 und X_2 seien unabhängig. Es soll die bedingte Verteilung (Punktwahrscheinlichkeit) für $X_1 | X_1 + X_2$ bestimmt werden, wenn

a) $X_1 \sim B_{n,p}$ und $X_2 \sim B_{m,p}$ Binomialverteilt sind,

b) $X_1 \sim P_{\lambda_1}$ und $X_2 \sim P_{\lambda_2}$ Poisson-verteilt sind.

7) Der Vektor $X = (X_1, \ldots, X_k)$ sei nach einer Multinomialverteilung $M_{N;p_1,p_2,\ldots,p_k}$ verteilt. Das diskrete Maß auf $\mathbb{R}^{k-1}$ ist dann durch die Punktwahrscheinlichkeiten

$$\mathbf{P}[X_1 = x_1, \ldots, X_k = x_k] \;=\; \frac{N!}{x_1! \ldots\ x_k!}\, p_1^{x_1} \ \ldots .\ .p_n^{x_k}$$

für $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = N$ definiert, wobei die Parameter $p_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, k$ $p_1 + p_2 + \ldots + p_k = 1$ erfüllen. Man bestimme die Randverteilung von X_i mit $1 \leq i \leq k-1$.