MASS- & WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE II

http://www.statistik.tuwien.ac.at/lv-guide WS 2014

ÜBUNGSBLATT 10

64) Für die Sub-σ-Algebra $\mathfrak{A}$ und die Zufallsvariable X gilt $\mathbb{E}[|X|\ |\mathfrak{A}] < \infty$ f.s. genau dann, wenn es eine Folge paarweise disjunkter Mengen $A_i \in \mathfrak{A}$ gibt mit $\sum_n \mathbf{P}(A_i) = 1$ und für $i \geq 1$

$$\mathbb{E}[|X|\mathbb{1}_{A_i}] \ < \ \infty \ .$$

65) Die Folge (X_n) unabhängiger und identisch verteilter Zufallsvariabler sei integrierbar mit Erwartungswert $\mu := \mathbb{E}X$. Die Zufallsvariable N sei von allen X_n unabhängig mit Werten in $\mathbb{N}$ und $\tau := \mathbb{E}N < \infty$. Dann gilt für die Summe

$$S \ := \ \sum_{i=1}^{N} X_i$$

die *Wald'sche Identität*

$$\mathbb{E}(S|N) \ = \ \mu\, N \quad \text{und} \quad \mathbb{E}(S) \ = \ \mu\, \tau\, .$$

66) Unter den Annahmen und Bezeichnungen des letzten Beispiels soll

a) für die charakteristische Funktion φ_S von S

$$\varphi_S(t) \ = \ M_N(\log(\varphi_X(t))$$

gezeigt werden, wobei φ_X die charakteristische Funktion von X_i und $M_N(.)$ die Momenterzeugende Funktion von N ist,

b) für Poisson-verteilte X_i (mit Mittel μ) und Poisson-verteiltem N (mit Mittel τ) berechne man $\mathbf{P}(S = 0)$.

67) Die Stochastischen Größen X, Y seien quadratisch integrierbar auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega\,, \mathfrak{S}\,, \mathbf{P})$ mit der Sub-σ-Algebra $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{S}$. Man zeige:

a) $\mathrm{Var}X = \mathrm{Var}\mathbb{E}(X|\mathfrak{A}) + \mathbb{E}[X - E(X|\mathfrak{A})]^2 \ \Rightarrow \ \mathrm{Var}\mathbb{E}(X|\mathfrak{A}) \leq \mathrm{Var}X\,.$

b) Aus $\mathbb{E}X^2 = \mathbb{E}Y^2$ und $\mathbb{E}(Y|\mathfrak{A}) = X$ **P**-fs. folgt $X = Y$ **P**-fs.

68) Unter den Annahmen des letzten Beispiels gilt auch

$$\mathbb{E}(X|Y) = Y \ \ \mathbf{P}\text{-f.s.} \ \wedge \ \mathbb{E}(Y|X) = X \ \mathbf{P}\text{-f.s.} \quad \Rightarrow \quad X = Y \ \mathbf{P}\text{-f.s.}\,.$$

69) Man zeige die bedingte *Markov-Ungleichung*: Für $\eta : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}^+$ monoton wachsend und eine Stochastische Größe X auf $(\Omega, \mathfrak{S}, \mathbf{P})$ und eine Sub-σ-Algebra $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{S}$ gilt

$$\mathbf{P}[|X| > \epsilon|\mathfrak{A}] \ \leq \frac{\mathbb{E}[\eta(|X|)|\mathfrak{A}]}{\eta(\epsilon)} \ .$$

70) Ist $(\Omega\,,\mathfrak{S}\,,P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $\mathfrak{A}\subseteq\mathfrak{S}$ eine σ-Algebra, $1\leq p\,,\ q:=\frac{p}{p-1}\,,$ $X\in\mathcal{L}_p(\Omega\,,\mathfrak{S}\,,P)$ und $Y\in\mathcal{L}_p(\Omega\,,\mathfrak{A}\,,P)$, so gilt

$$Y=\mathbb{E}(X|\mathfrak{A})\ \Leftrightarrow\ \int Y\,Z\,dP=\int X\,Z\,dP\quad\forall\,Z\in\mathcal{L}_q(\Omega\,,\mathfrak{A}\,,P)\,.$$