ÜBUNGSBLATT 11

71) Man zeige die bedingte *Hölder-Ungleichung*: Wenn $X \in L_p$ und $Y \in L_q$ mit $1 < p < \infty$ und konjugiertem $q = \frac{p}{p-1}$ auf $(\Omega, \mathfrak{S}, \mathbf{P})$ mit der Sub-σ-Algebra $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{S}$, dann gilt

$$\mathbb{E}[|XY| \; |\mathfrak{A}] \;\le\; (\mathbb{E}[|X|^p|\mathfrak{A}])^{\frac{1}{p}} \; (\mathbb{E}[|Y|^q|\mathfrak{A}])^{\frac{1}{q}} \; .$$

72) **a)** Die Zufallsvariablen $X, Y \in L_2$ seien unkorreliert. Sind dann auch $\varphi \circ X$ und $\eta \circ Y$ für beliebige messbare oder bestimmte Funktionen φ, η unkorreliert?

b) Die Folge Stochastischer Größen $X_i \in L_2$ seinen paarweise korreliert. Die Größen können beliebig positiv aber nicht beliebig negativ korreliert sein: Man zeige, dass für $(X_1, \dots, X_n)$ und $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j$,

$$\mathrm{Cor}(X_i, X_j) \;<\; -\,\frac{1}{n-1}$$

nicht möglich ist.

Hinweis zu b): Man betrachte für standardisierte X_i die Varaianz der Summe.

73) X_i ist eine unabhängige, identisch verteilte und nichtnegative Folge Stochastischer Größen mit $\mathbb{E}X < \infty$. Gegen welchen Wert konvergiert f.s. das geometrische Mittel

$$G_n \;=\; \sqrt[n]{X_1 \dots X_n}$$

für $n \to \infty$? Man bestimme den Grenzwert, wenn $X_i \sim U_{0,1}$.

74) Die Lebesgue-Dichte der induzierten Wahrscheinlichkeit der Stochastischen Größe X sei $p(.)$ und für die messbare Funktion g gelte $\mathbb{E}|g(X)| < \infty$. Y_i sei eine unabhängige, identisch verteilte Folge Stochastischer Größen mit Lebesgue-Dichte $h(.)$, die $[h = 0] \subseteq [g.p = 0]$ erfüllt. Dann kann mit den Realisierungen von Y_i das Integral $\mathbb{E}\, g(X)$ approximiert werden: Man zeige, dass ein $G(.)$ mit $\mathbb{E}G(Y) = 1$ existiert, sodass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} g(Y_i) G(Y_i) \;=\; \int g(x).p(x)\; \lambda(dx) \qquad \text{f.s.}$$

75) Man berechne das Integral

$$I := \int_r^\infty \frac{1}{x}\, \tau\, \mathrm{e}^{-\tau x} dx \qquad (\tau > 0)$$

mit Hilfe des Gesetzes der großen Zahlen für $r = 10\,, \tau = 1$. Schätzen Sie die für die Berechnung des Integrals benötigte Anzahl von Zufallszahlen ab, wenn das numerische Ergebnis mit einer Wahrscheinlichkeit von $\alpha := 0.99$ um nicht mehr als $\varepsilon := 10^{-2}$ bzw. $\varepsilon := 10^{-3}$ vom wahren Wert abweichen soll.

76) Gilt für die unabhängige Folge von Zufallsvariablen X_n mit $X_1 \equiv 0$ und

$$P(X_n = n) = P(X_n = -n) = \frac{1}{2n \log n}, \quad P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n \log n} \quad \text{für } n \geq 2$$

ein Gesetz der großen Zahlen? Es soll also geprüft werden, ob $\overline{X}_n$ in der Wahrscheinlichkeit oder $\mathbf{P}$-f.s. gegen eine Konstante konvergiert.

77) Man berechne für eine Folge unabhängig, identisch verteilter Zufallsvariabler $X_n \in \mathcal{L}_2(\Omega, \mathfrak{S}, \mathbf{P})$ mit $\eta := \mathbb{E}X_n$, $\sigma^2 := \operatorname{Var} X_n$ und $\overline{X}_n := \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ den Erwartungswert der Stichprobenvarianz $S_n^2 := \frac{1}{n-1} \sum\limits_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X}_n\right)^2$, und zeige, dass gilt $\lim\limits_n S_n^2 = \sigma^2 \quad P$-fs.