ÜBUNGSBLATT 12

78) Man zeige, dass für eine Folge von unabhängigen Ereignissen A_n mit $\mathbf{P}(A_n) = \frac{1}{n}$ die Summen $S_n := \sum_{i=2}^{n} \frac{\mathbb{1}_{A_i} - \frac{1}{i}}{\log i}$ $\mathbf{P} - f.s.$ konvergieren. Damit beweise man

$$\frac{1}{\log n} \sum_{i=1}^{n} \left(\mathbb{1}_{A_i} - \frac{1}{i} \right) \to 0 \qquad \mathbf{P} - f.s.$$

und zeige schließlich

$$\frac{1}{\log n} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A_i} \to 1 \qquad \mathbf{P} - f.s.$$

79) Für $\omega \in [0,1)$ von $([0,1), \mathfrak{B}|_{[0,1)}, \lambda|_{[0,1)})$ sei $(0, \omega_1, \omega_2, \ldots); \omega_i \in \{0,1\}$ die dyadische Darstellung. Man begründe, dass λ- fast alle Zahlen ω aus [0,1] unendlich viele 0 in der dyadischen Darstellung besitzen und

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{\infty} \omega_i \;=\; \frac{1}{2}$$

erfüllen.

Bemerkung: Eine Zahl ω mit dieser Eigenschaft heißt normale Zahl.

80) Die Familien $(X_t, \mathfrak{A}_t)$ und $(Y_t, \mathfrak{C}_t)$ seien Martingale. Man begründe, dass $Z_t := X_t + Y_t$ ein an $\mathfrak{A}_t$ adaptiertes Martingal ist, wenn die Filtrationen $\mathfrak{A}_t = \mathfrak{C}_t$ gleich sind. Es soll ein Beispiel gefunden werden, dass Z_t kein Martingal (adaptiert an die kanonische Filtration) ist, wenn $\mathfrak{A}_t$ und $\mathfrak{C}_t$ verschieden sind.

81) Die Folge Y_i bestehe aus unabhängig und identische verteilten Zufallsgrößen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ mit der Wahrscheinlichkeitsdichte f_0 bezüglich des Maßes μ auf $\mathbb{R}$. f_1 sei eine weitere Wahrscheinlichkeitsdichte bezüglich μ. Dann bilden die *Likelihood-Quotienten*

$$L_n \;:=\; \frac{\prod_{i=1}^{n} f_1(Y_i)}{\prod_{i=1}^{n} f_0(Y_i)}$$

ein Martingal adaptiert an die kanonische Filtration von Y_i.

82) Es sei $X_n, n \in \mathbb{N}$ ein Martingal (bezüglich der kanonischen Filtration) mit $\mathbb{E}X_n^2 < \infty$, wobei $X_0 \equiv 0$. Dann gilt

a) Die Zuwächse sind unkorreliert, für $j \neq k$ ist

$$\mathbb{E}(X_k - X_{k-1})(X_j - X_{j-1}) \;=\; 0 \qquad ,$$

b)

$$\mathbb{E}X_n^2 \;=\; \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k - X_{k-1})^2 \qquad ,$$

c) wenn $\sup_k \mathbb{E}(X_k - X_{k-1})^2 < \infty$ dann gilt für beliebiges $\epsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(\frac{X_n}{n} > \epsilon) \;=\; 0 \qquad .$$

83) Die Folge N_t, $N_0 \equiv 0$, Stochastischer Größen mit Werten in $\mathbb{N}$ habe unabhängige Zuwächse, also $N_{t_i} - N_{t_{i-1}}$ bildet für beliebige $0 < t_1 < t_2 < \ldots t_n$ eine unabhängige Folge, und die Zuwächse sind Poisson-verteilt $N_t - N_s \sim P_{\lambda(t-s)}$ mit Parameter $\lambda(t-s)$ für festes $\lambda > 0$ und $s < t$. Man zeige, dass sowohl N_t als auch N_t^2 ein Submartingal (adaptiert an die kanonische Filtration) sind und gebe die Doob-Zerlegung von N_t an.

Bemerkung: N_t heißt homogener Poisson-Prozess mit Rate λ.

84) Die stochastische Folge N_n, $N_0 \equiv 1$ mit Werten in $\mathbb{N}$ bildet einen einfachen Verzweigungsprozess, wenn

$$N_{n+1} \;:=\; \sum_{k=1}^{N_n} \xi_k$$

wobei $\xi_k \in \mathbb{N}$ unabhängig (voneinander und von N_n) und identische Realisierungen einer Zufallsgrößen ξ mit Mittel $\mathbb{E}\xi = m$ und Varianz $\sigma^2 < \infty$ sind. Man zeige, dass

$$\tilde{N}_n \;:=\; \frac{N_n}{m^n}$$

ein Martingal ist und bestimme $\mathbb{E}N_n$ und $\mathrm{Var}(N_n)$.

Hinweis: Die Basis für die Berechnung der Varianz ist die Rekursion

$$\mathrm{V}ar(N_{n+1}) \;=\; \sigma^2 \mathbb{E}N_n \;+\; m^2 \mathrm{V}ar(N_n) \qquad .$$

Bemerkung: Man kann N_n als den Umfang der n-ten Generation interpretieren. Dann ist ξ_k die Anzahl der 'Nachkommen' des k-ten Individuums aus dieser Generation.