MASS- & WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE II

http://www.statistik.tuwien.ac.at/lv-guide WS 2014/15

ÜBUNGSBLATT 13

85) Man zeige, dass für Verteilungsfunktionen i.e.S. F_n, $n \in \mathbb{N}$ und F gilt

$$(F \quad \text{ist stetig auf } \mathbb{R} \wedge F_n \Rightarrow F) \quad \Rightarrow \quad \lim_n \sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)| = 0\,.$$

86) Es sei X_n, $n \in \mathbb{N}$, eine Folge von Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktionen

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x < 0 \\ x(1 - \frac{\sin(2n\pi x)}{2n\pi x}) & \text{für} \quad 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{für} \quad x \ge 1\,. \end{cases}$$

Man zeige, dass X_n in der Verteilung gegen eine gleichverteilte Größe $X \sim U_{0,1}$ konvergiert. Konvergieren auch die Dichten dieser Verteilungen?

87) Wenn für X und die Folgen Stochastischer Größen X_n und Y_n und $Z_n := X_n - Y_n$ die Verteilungskonvergenzen $X_n \Rightarrow X$ und $Z_n \Rightarrow 0$ gelten, dann konvergiert auch $Y_n \Rightarrow X$ gegen die Stochastische Größe X.
Hinweis: Für Z_n kann man auch lt. Satz 17.5 die Konvergenz in der Wahrscheinlichkeit verwenden.

88) Man zeige, dass für Zufallsvariable X_n mit $P(X_n \in \mathbb{Z}) = 1 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$ gilt

$$X_n \Rightarrow X \Leftrightarrow (P(X \in \mathbb{Z}) = 1 \wedge \lim_n P(X_n = z) = P(X = z) \quad \forall\, z \in \mathbb{Z})\,.$$

89) Unter $2N + 1$ Personen wird eine Abstimmung über ein Projekt durchgefürt. n Personen sind für das Projekt der Rest ist gleichgültig und entscheidet mit der Wahrscheinlichkeit 0.5 für oder gegen das Projekt. Wie groß muss n sein damit die Befürworter mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.99 gewinnen. Berechnen Sie n konkret für N=500 000.

90) Die Folge unabhängiger und identisch verteilter Stochastischer Größen $X_i \sim Ex_1$ folgt einer Exponentialverteilung. Man bestimme die Verteilung des Maximums $M_n := \max(X_1, \ldots, X_n)$ und bestimme die Grenzverteilung von $M_n - \log(n)$.

91) Unter Verwendung des zentralen Grenzverteilungssatzes zeige man

$$\lim_{n \to \infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}\,.$$