ÜBUNGSBLATT 2

8) Auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ sind das absolut stetige Wahrscheinlichkeitsmaß μ , $\mu \ll \lambda$, und das diskrete Wahrscheinlichkeitsmaß $\nu \ll \xi|_{\mathbb{N}}$ erklärt.

- **a)** Man zeige, dass das Faltungsmaß absolut stetig ist, $\mu * \nu \ll \lambda$.
- **b)** Für die Faltung einer Exponentialverteilung $\mu \simeq Ex_1$ und einer Geometrischen Verteilung $\nu \simeq G_{1/2}$ bestimme man die Dichte.

9) X_1, X_2, X_3 seien unabhängig und identisch verteilt nach $U_{0,1}$. Man bestimme die Verteilung von $X_1 + X_2 + X_3$.

10) Die Faltungsgesetzte der Binomial-, Poisson-, Geometrischen Verteilung sowie der Gamma-Verteilung (Vorlesung, Abschnitt 10.6) bestätige man mit der Laplace-Transformierten.
Hinweis: Beispiele 72) und 74) aus MWTH I.

11) Für die unabhängigen Gamma-verteilten Zufallsvariablen $X_1 \sim \Gamma(a_1, b)$ und $X_2 \sim \Gamma(a_2, b)$ bestimme man die Verteilung des Anteils

$$Y := \frac{X_1}{X_1 + X_2} .$$

12) Die 2-dimensionale Stochastische Größe (X, Y) habe die Dichtefunktion

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{für } 0 < x \leq 1, \ 0 < y \leq x \\ 0 & \text{sonst} . \end{cases}$$

Man gebe die bedingten Dichten von $X|Y = y$ bzw. $Y|X = x$ und die zugehörigen Erwartungswerte $\mathbb{E}(X|Y = y)$ und $\mathbb{E}(Y|X = x)$ an.

13) Die Lebesgue-Dichte $f(.)$ soll kompakten Träger besitzen und $p(.)$ sei ein Polynom vom Grad k. Dann ist die (Funktions-)Faltung $h := f * p$ eine integrierbare Funktion und als Polynom darstellbar.
Hinweis: Der *Träger* einer Dichte ist die abgeschlossene Menge

$$\text{supp } f := \overline{\{\omega | \ f(\omega) > 0 \ \}} .$$

14) Für unabhängige, stetig verteilte stochastische Größen X und Y mit Verteilungsfunktionen $F_X(.)$, $F_Y(.)$ und Dichten $f_X(.)$,$f_Y(.)$ zeige man

$$\mathbf{P}[X \leq Y] = \int_{-\infty}^{\infty} F_X(y) f_Y(y) \, dy.$$

Man berechne damit $\mathbf{P}[X \leq Y]$, wenn $X \sim Ex_{\lambda_1}$ und $Y \sim Ex_{\lambda_2}$ unabhängig exponentialverteilt sind.