MASS- & WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE II

http://www.statistik.tuwien.ac.at/lv-guide WS 2014

ÜBUNGSBLATT 4

22) Zu der charakteristischen Funktion φ_X der Zufallsgröße X sind auch der Realteil $\Re(\varphi_X)$ und $|\varphi_X|^2$ charakteristische Funktionen. Man überlege sich die entsprechenden Zufallsgrößen.

23) Für die $k-$dimensionale Normalverteilung $\boldsymbol{X} \sim N(\mu, \Sigma)$ soll die charakteristischen Funktion

$$\varphi(t) \;=\; \mathbb{E}\, \mathrm{e}^{i\boldsymbol{X}^\top t}, \qquad t \in \mathbb{R}^k,$$

bestimmt werden. Damit zeige man, dass die Randverteilung einer Komponente X_i von $\boldsymbol{X}$ wieder normalverteilt ist.

Hinweis: Man betrachte zunächst unabhängige Standardnomalverteilungen für X_i und verwende dann die Reproduktionseigenschaft wie in Beispiel 4 beschrieben.

24) Die charakteristische Funktion $\varphi : \mathbb{R} \to [0, 1]$ ist periodisch mit der Periode 2π und für $t \in [-\pi, \pi)$ ist

$$\varphi(t) \;=\; 1 - 2\frac{|t|}{\pi} \;.$$

Man bestimme das diskrete Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{Z}$ zu φ.

25) Man berechne die charakteristische Funktion der Multinomialverteilung $M_{N;p_1,p_2,\ldots,p_k}$ des stochastischen Vektors $X \in \mathbb{N}^{k-1}$. Damit soll gezeigt werden, dass jeder Teilvektor $X_0 = (X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_m})$ von X mit $\{i_1, i_2, \ldots, i_m\} \subseteq \{1, \ldots, k-1\}$ wieder Multinomialverteilt ist. (Vergleiche Beispiel 7).

26) Man zeige, dass durch

$$\zeta(A) := \begin{cases} |A|\,, & \text{für} |A| < \infty \\ -|A^c|\,, & \text{für} |A^c| < \infty \end{cases}$$

auf der Algebra $\mathfrak{A} := \{A \subseteq \mathbb{R} : |A| < \infty \;\vee\; |A^c| < \infty\}$ eine σ-additive Mengenfunktion mit $\zeta(\emptyset) = \zeta(\mathbb{R}) = 0$ definiert wird, die aber nicht zu einem signierten Maß auf die von $\mathfrak{A}$ erzeugte σ-Algebra fortgesetzt werden kann.

27) Die Maße ν_i und μ_i seinen σ-endliche Maße auf $(\Omega_i, \mathfrak{A}_i)$ mit $\nu_i \ll \mu_i$ für $i = 1, 2$. Für die Produktmaße $\nu_1 \otimes \nu_2$ bzw. $\mu_1 \otimes \mu_2$ gilt dann

$$\nu_1 \otimes \nu_2 \;\ll\; \mu_1 \otimes \mu_2$$

und die RN-Dichte ist ebenfalls das Produkt

$$\frac{d\;\nu_1 \otimes \nu_2}{d\;\mu_1 \otimes \mu_2}(x_1, x_2) \;=\; \frac{d\nu_1}{d\mu_1}(x_1)\;\frac{d\nu_2}{d\mu_2}(x_2)\;.$$

28) **a)** Ist ν ein signiertes Maß auf einem Messraum $(\Omega\,, \mathfrak{S})$ so gilt

$$|\nu|(A) = \sup\left\{ \sum_{i=1}^{n} |\nu(A_i)| : \bigcup_{i=1}^{n} A_i \subseteq A \;\wedge\; A_i \cap A_j = \emptyset\,, \forall\, i \neq j \right\}.$$

b) Sind μ und ν zwei signierte Maße und ist auch $\mu + \nu$ ein signiertes Maß (d.h. μ und ν nehmen entweder beide nicht den Wert $-\infty$ an oder beide nehmen ∞ nicht an), so gilt

$$|\mu + \nu| \leq |\mu| + |\nu|\,.$$