ÜBUNGSBLATT 5

29) Für die folgenden Maße ν, μ auf $([0,1]\,, \mathfrak{B} \cap [0,1])$ soll geklärt werden, ob eine Lebesgue-Zerlegung von ν bezüglich μ existiert:

a) $\nu := \lambda\,, \mu(B) := \zeta(B) := |B| \quad \forall\, B \in \mathfrak{B} \cap [0,1]\,,$

b) $\nu := \zeta\,, \mu := \lambda\,,$

c) $\nu(B) := |B \cap A|\,, \mu(B) := |B \cap A^c|\,,\ A \in \mathfrak{B} \cap [0,1]\,,$

d) $\nu(B) := |B \cap A|\,, \mu(B) := |B \cap A^c|\,,\ A \notin \mathfrak{B} \cap [0,1]\,.$

30) Man zeige, dass selbst dann , wenn μ endlich und $\nu \quad \sigma$-endlich ist, aus $\nu \ll \mu$ im Allgemeinen nicht folgt, dass es für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass $\mu(A) \leq \delta \ \Rightarrow\ \nu(A) \leq \varepsilon\,.$

31) Man begründe, dass die Funktion

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \ln x, & 1 \leq x < \mathrm{e} \\ \frac{x+6-3\,\mathrm{e}}{3-\mathrm{e}}, & \mathrm{e} \leq x < 3 \\ 4 & x \geq 3 \end{cases}$$

eine Verteilungsfunktion i.w.S. ist. Weiters bestimme man

a) das Maß folgender Mengen $\{0\}, \{\mathrm{e}\}, \mathbb{Q}, [1,\mathrm{e}], [1,\mathrm{e})$,

b) die Lebesgue-Zerlegung von μ_F bezüglich λ

c) und berechne $\int x^2 + \frac{1}{x}\,\mathbb{1}_{\mathbb{N}_0}(x)\, d\mu_F(x)\,.$

32) Ist $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ ein endlicher Maßraum mit $\mu(\Omega) > 0\,, \nu$ ein weiteres endliches Maß auf dem Raum mit der Lebesgue-Zerlegung $\nu_c \ll \mu\,, \nu_s \perp \mu\,, \quad \mathfrak{A}$ eine Teilsigmaalgebra von $\mathfrak{S}$ und $\widetilde{\nu} := \nu|_{\mathfrak{A}}$ die Restriktion von ν auf $\mathfrak{A}$ mit der Lebesgue-Zerlegung $\widetilde{\nu}_c \ll \mu|_{\mathfrak{A}}\,, \widetilde{\nu}_s \perp \mu|_{\mathfrak{A}}$, so gilt

$$\widetilde{\nu}_c(A) \geq \nu_c(A) \ \wedge\ \widetilde{\nu}_s(A) \leq \nu_s(A) \quad \forall\, A \in \mathfrak{A}\,.$$

Für $\mathfrak{A} := \{\emptyset, \Omega\}$ gilt $\widetilde{\nu} = \widetilde{\nu}_c$ und $\widetilde{\nu}_s \equiv 0\,.$

33) Man zeige, dass auf $\mathfrak{S} := \{B \times \mathbb{R} :\ \ B \in \mathfrak{B}\ \}$ das Maß $\nu(B \times \mathbb{R}) := \lambda(B)$ absolut stetig bezüglich $\mu(B \times \mathbb{R}) := \lambda_2(B \times \mathbb{R})$ ist, dass es aber keine Dichte $\frac{d\nu}{d\mu}$ gibt. Widerspricht dies dem Satz von Radon-Nikodym ?

34) Gegeben seien folgende Verteilungsfunktionen auf $\mathbb{R}$:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 0 \\ x & \text{falls } 0 \leq x < 1 \\ x+1 & \text{falls } 1 \leq x < 2 \\ 3 & \text{falls } x \geq 2 \end{cases} \qquad G(x) = \begin{cases} x & \text{falls } x < 1 \\ x^2 & \text{falls } 1 \leq x < 2 \\ 5 & \text{falls } x \geq 2 \end{cases}$$

Bestimmen Sie die Lebesgue-Zerlegung von μ_G bezüglich μ_F sowie die Radon-Nikodym-Dichte $\frac{d\mu_G}{d\mu_F}$ des absolut stetigen Anteils.

35) Sind ν_n und $\nu := \sum\limits_n \nu_n$ endliche Maße auf dem endlichen Maßraum $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ mit den Lebesgue-Zerlegungen $\nu_c \ll \mu\,, \nu_{n,c} \ll \mu\,, \nu_s \perp \mu\,, \nu_{n,s} \perp \mu$, so gilt $\nu_c = \sum\limits_n \nu_{n,c} \ \wedge \ \nu_s = \sum\limits_n \nu_{n,s}$ sowie $\sum\limits_n \frac{d\nu_{n,c}}{d\mu} = \frac{d\nu_c}{d\mu}$.