MASS- & WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE II

http://www.statistik.tuwien.ac.at/lv-guide WS 2014

ÜBUNGSBLATT 6

36) Man beweise, dass das Produkt von zwei auf $[a\,,b]$ absolut stetigen Funktionen $f\,,g$ ebenfalls absolut stetig ist.

37) Für $f:\ [a\,,b\,] \to \mathbb{R}$ beweise man die folgenden Aussagen:

- **a)** Stetige Funktionen müssen nicht von beschränkter Variation sein.
- **b)** Stetige, monotone Funktionen müssen nicht absolut stetig sein.
- **c)** Gibt es ein $C \in \mathbb{R}^+$ mit $|f(x) - f(y)| \leq C\,|x - y|\,,\ \forall\ x\,,y \in [a\,,b\,]$, so ist f absolut stetig.
- **d)** Wenn f auf $[a\,,b\,]$ stetig ist und die Ableitung f' von f auf $(a\,,b\,)$ existiert und beschränkt ist, ist f absolut stetig.
- **e)** Wenn f in jedem Punkt von $(a\,,b\,)$ differenzierbar ist, muss f nicht absolut stetig sein.

38) Ist (f_n) eine Folge monoton wachsender Funktionen auf $[a\,,b]$, für die $\forall\ x \in [a\,,b]$ gilt

$$f(x) := \sum_n f_n(x) \in \mathbb{R}$$

. Man zeige :

- **a)** $\sum\limits_n f_n' \leq f' \quad \lambda$-fü,
- **b)** für die Teilfolge der Restsummen $r_{n_k} := \sum\limits_{n>n_k} f_n$ mit $r_{n_k}(b) \leq 2^{-k} \quad \forall\ k \in \mathbb{N}$ gilt $\sum\limits_k r_{n_k}' < \infty \quad \lambda$-fü (was folgt daraus für $\lim\limits_k r_{n_k}'$?),
- **c)** $\sum\limits_n f_n' = f' \quad \lambda$-fü.

39) Die Maße ν und μ sind σ-endlich auf $(\Omega, \mathfrak{A})$ mit $\nu \leq \mu$. Dann existiert eine μ-f.ü. eindeutige Dichte $f = \frac{d\nu}{d\mu}$ und es gilt $0 \leq f \leq 1$ μ-f.ü.

40) Man zeige, dass für die Zufallsvariable X auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ für $0 < \alpha < \beta$ die *Ljapunoff-Ungleichung* gilt:

$$(\mathbb{E}|X|^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \leq (\mathbb{E}|X|^\beta)^{\frac{1}{\beta}}$$

und wenn $X \geq 0, p > 0$,

$$\frac{1}{(\mathbb{E}X)^p} \leq \mathbb{E}\frac{1}{X^p}\ .$$

41) $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ sei ein Wahrscheinlichkeitsraum mit endlichem Ω, $|\Omega| = m$. Es gelte $\mathbf{P}(\omega) > 0$ für $\omega \in \Omega$. Durch

$$\mathcal{H}(\mathbf{P}) \ := \ -\int \log(\mathbf{P}(\omega))\ d\mathbf{P}(\omega)$$

wird die *Entropie* der Verteilung $\mathbf{P}$ definiert. Man zeige

$$0 \ \leq \ \mathcal{H}(\mathbf{P}) \ \leq \ \log(m).$$

42) Unter Anwendung der Jensen-Ungleichung zeige man: Für reelle $x_i > 0$ und $p_i > 0$ für $i = 1, \ldots, n$ mit $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ gilt

$$\prod_{i=1}^{n} x_i^{p_i} \;\leq\; p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$$

und falls alle x_i verschieden sind, gilt die strikte Ungleichung. Weiters gilt für $q_i := 1/p_i$

$$\prod_{i=1}^{n} x_i \;\leq\; \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^{q_i}}{q_i} \quad .$$