ÜBUNGSBLATT 7

43) Seien reelle $p_i > 1$ $(i = 1, \ldots, n)$ mit $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i} = 1$ gegeben. Man zeige die verallgemeinerte *Hölder-Ungleichung* für Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$:

$$\mathbb{E}|X_1 \ldots X_n| \;\leq\; \prod_{i=1}^{n} (\mathbb{E}|X_i|^{p_i})^{1/p_i} \; .$$

44) Die Tschebyscheff'sche Ungleichung kann im Allgemeinen nicht verschärft werden. Man gebe eine Folge Stochastischer Größen X_k mit positiven Varianzen an, sodass für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\mathbf{P}[|X_k - \mathbb{E}X_k| \geq k] \;=\; \frac{\operatorname{var}(X_k)}{k^2} \; .$$

45) Es sei $X \in \mathscr{L}^k$, $k \in \mathbb{N}$ und $m \leq k$. Für die (zentrierten) Momente der Zufallsgröße X gilt folgende Ungleichung

$$\mathbb{E}[(X - c)^m] \;\leq\; 2^m (\mathbb{E}|X|^k + |c|^k)^{m/k} \; .$$

46) Man finde ein σ-endliches Maß μ auf einem geeigneten Messraum, sodass die *Schachtelung* der L^p-Räume für endliche Maße invertiert wird. Es gelte für μ und $1 \leq p < q \leq \infty$

$$L^p(\mu) \;\subsetneq\; L^q(\mu) \; .$$

47) Die Funktion $f \in \mathscr{L}^p$ ist p-fach integrierbar auf $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ für $1 \leq p < \infty$. Dann gilt:

$$\mu\Big(\big\{x \in \Omega : |f(x)| > c \;\; \| \, f \, \|_p \;\; \big\}\Big) \;\leq\; \frac{1}{c^p} \qquad\qquad \forall \, c > 0 \; .$$

48) Man beweise, dass für integrierbare Funktionen $f \, , g$ auf einem Maßraum $(\Omega \, , \mathfrak{S} \, , \mu)$ und $0 < \alpha < 1$ gilt

$$\int |f|^\alpha \, |g|^{1-\alpha} \, d\mu \leq \left(\int |f| \, d\mu\right)^\alpha \left(\int |g| \, d\mu\right)^{1-\alpha} .$$

49) $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ sei ein Maßraum und $1 \leq p < r < q < \infty$. Dann folgt $L_p \cap L_q \subseteq L_r$.