ÜBUNGSBLATT 9

57) Die Zufallsvariablen X und Y seien unabhängig. Dann ist $X + Y$ genau dann integrierbar, wenn beide Variablen X und Y integrierbar sind.
Hinweis: Man betrachte für beliebiges $c > 0$ die Zufallsvariable $|X| \mathbb{1}_{|Y| \leq c}$ bzw. deren Erwartung.

58) Man suche eine Funktionenfolge (f_n) auf einem endlichen Maßraum $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$, sodass zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, für das gilt

$$\mu(A) \leq \delta \;\Rightarrow\; \int_A |f_n| \, d\mu < \varepsilon$$

aber $\sup_n \int |f_n| \, d\mu = \infty$, und ebenso eine Folge mit $\sup_n \int |f_n| \, d\mu < \infty$, die die obige $\varepsilon - \delta$-Bedingung nicht erfüllt.

59) Man suche eine Funktionenfolge (f_n) auf einem endlichen Maßraum $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$, die gleichmäßig integrierbar ist, zu der es aber keine integrierbare Funktion g mit $g \geq |f_n| \quad \mu$-fü $\forall\, n \in \mathbb{N}$ gibt.

60) Sind $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ Familien mesbarer Funktionen auf einem Maßraum $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$, so zeige man:

a) $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{L}_1 \;\wedge\; |\mathcal{F}| < \infty \;\Rightarrow\; \mathcal{F}$ ist gleichmäßig integrierbar,

b) $\mathcal{G}$ ist gleichmäßig integrierbar, wenn $\mathcal{F}$ gleichmäßig integrierbar ist und $\forall\, g \in \mathcal{G} \quad \exists\, f \in \mathcal{F} : \; |g| \leq |f| \quad \mu$-fü,

c) sind $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ gleichmäßig integrierbar, so ist $\{f \vee g, f \pm g : \; f \in \mathcal{F}, g \in \mathcal{G}\}$ auch gleichmäßig integrierbar.

61) Die monoton wachsende Funktion $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ erfüllt $\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{x} = \infty$. Wenn eine Folge von Zufallsvariablen X_n

$$\sup_n \mathbb{E}\, g(|X_n|) \;<\; \infty$$

erfüllt, dann ist X_n gleichgradig integrierbar.

62) Für die bivariate Normalverteilung $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$ (vgl. Beispiel 5) bestimme man die bedingte Erwartung $\mathbb{E}[X|Y]$.
Hinweis: Man bestimme zunächst die bedingte Erwartung für standardisierte Größen $(X, Y) \sim N((0, 0, 1, 1, \rho)$.

63) Für die Zufallsvariablen X, Y mit der Dichte $f(x, y) := \frac{1}{x} \mathbb{1}_{[0,1]}(x) \, \mathbb{1}_{[0,x]}(y)$ berechne man die bedingten Dichten $f_{X|Y}, f_{Y|X}$ und $\mathbb{E}(X|Y), \mathbb{E}(Y|X)$.