1. Übung aus Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie WS 2015

1. Man berechne den Erwartungswert einer Cauchy-verteilten Zufallsvariablen, erzeuge 10^6 Cauchy-verteilte Zufallszahlen $x_1, \ldots, x_{10^6}$ und stelle die Folge der Mittelwerte $\overline{x}_n = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$ abhängig von n graphisch dar. Was fällt Ihnen an der Folge der Mittelwerte auf? Außerdem bilde man von jeweils 100 000 Zufallszahlen die Stichprobenmittelwerte und vergleiche diese.

2. Bei einer Lotterie werden 50 000 Gewinne aus 100 000 Losen mit Zurücklegen gezogen. Die Lotterie bewirbt dieses Spiel mit dem Slogan: „*Jedes zweite Los gewinnt.*“ Ist diese Aussage korrekt? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für ein Los zu gewinnen? Wie groß ist die mittlere Anzahl von Gewinnen pro Los?

3. Sei $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine Durchnummerierung der rationalen Zahlen. Berechnen Sie für $\mu(A) := \int_A \mathrm{e}^{-|\omega|}\, d\lambda(\omega) + \sum\limits_{q_n \in A} 2^{-n},\ A \in \mathfrak{B}$ das Integral $\int \left(\omega^2\, \mathbb{1}_{\mathbb{Q}^c} + 1_{\mathbb{Q}} \right)\, d\mu$.

4. Man zeige, dass eine Zufallsvariable X genau dann integrierbar ist, wenn $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(|X| > n) < \infty$ und, dass dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} n\, P(|X| > n) = 0$.
   Hinweis: Stellen Sie $P(|X| \geq n)$ als Summe von Wahrscheinlichkeiten dar, vertauschen Sie die Summationsreihenfolge und interpretieren Sie das Ergebnis als Integral einer diskreten Zufallsvariablen.

5. Man beweise, dass für eine Folge integrierbarer Funktionen X_n mit $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int |X_n|\, d\mu < \infty$ die Folge $\sum\limits_{n=1}^{N} X_n$ μ-fü gegen eine integrierbare Funktion X konvergiert und dass gilt $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int X_n\, d\mu = \int X\, d\mu$.

6. Man zeige, dass aus $X_n \sim Ex_{\tau_n}$ und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\tau_n} < \infty$ folgt
   $$\sum_{n=1}^{\infty} X_n < \infty \ P \text{ fs.}$$

7. Man beweise, dass für integrierbare Funktionen $g_n \leq f_n \leq h_n$ aus $\lim\limits_n g_n = g \in \mathcal{L}_1$ μ-fü, $\lim\limits_n f_n = f$ μ-fü, $\lim\limits_n h_n = h \in \mathcal{L}_1$ μ-fü,

$\lim_n \int g_n \, d\mu = \int g \, d\mu$ und $\lim_n \int h_n \, d\mu = \int h \, d\mu$ folgt

$$\lim_n \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu \in \left[\int g \, d\mu \, , \int h \, d\mu \right] .$$