1. Übung aus Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie
WS 2015

1. Man berechne den Erwartungswert einer Cauchy-verteilten Zufallsvariablen, erzeuge 10^6 Cauchy-verteilte Zufallszahlen $x_1, \ldots, x_{10^6}$ und stelle die Folge der Mittelwerte $\overline{x}_n = \frac{x_1+\ldots+x_n}{n}$ abhängig von n graphisch dar. Was fällt Ihnen an der Folge der Mittelwerte auf? Außerdem bilde man von jeweils 100 000 Zufallszahlen die Stichprobenmittelwerte und vergleiche diese.
   Hinweis: Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion der Cauchy-Verteilung mit Hilfe von $\frac{\partial\left(\frac{\pi}{2}+\arctan x\right)}{\partial x} = \frac{1}{1+x^2}$.
   Lösung: Aus $\int_0^\infty \frac{x}{\pi\,(1+x^2)}\,dx = \frac{1}{2\,\pi}\,\ln(1+x^2)\Big|_0^\infty = \infty$ folgt klarerweise $\mathbb{E}X^+ = \mathbb{E}X^- = \infty$. Daher existiert der Erwartungswert nicht.

```
x_ runif(10000)
y_tan(pi*(x-0.5))
z _ log(x)/(-3)
t_(1:10000)
c1 _ cumsum(y)/t
c2 _ cumsum(z)/t
postscript("CauchyExponentialMittelwerte.ps")
matplot(c1,ty="l")
matplot(c2,ty="l")
matplot(cbind(c1,c2),ty="l")
abline(1/3,0)
abline(0,0)
```

   Aus $F(x) = \frac{1}{2} + \frac{\arctan(x)}{\pi}$ folgt $F^{-1}(p) = \tan\left(\pi\,(y-\frac{1}{2})\right)$. Ist $X \sim U_{0,1}$, so gilt demnach $Y := \tan\left(\pi\,(X-\frac{1}{2})\right) \sim Cauchy$.
   Zwei Computersimulationen ergeben folgende Werte:

1)	-1.02155,	-0.54502,	-0.13578,	0.19460,	2.20061
	1.66354 ,	1.32334 ,	1.93935 ,	1.63441,	1.43378
2)	-1.27201,	-0.73168,	-0.25074,	11.63048,	9.41526
	6.66181 ,	5.18304 ,	4.65973 ,	4.07185 ,	3.91534

   Es ist keine Konvergenz gegen einen Grenzwert festzustellen.
   Kein Widerspruch zum GGZ, da der Erwartungswert nicht existiert.

2. Bei einer Lotterie werden 50 000 Gewinne aus 100 000 Losen mit Zurücklegen gezogen. Die Lotterie bewirbt dieses Spiel mit dem Slogan: „*Jedes zweite Los gewinnt.*“ Ist diese Aussage korrekt? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für ein Los zu gewinnen? Wie groß ist die mittlere Anzahl von Gewinnen pro Los?

Lösung: $G \ldots$ mindestens ein Gewinn, $\quad G^c \ldots$ kein Gewinn

$$P(G^c) = (1 - \frac{1}{10^5})^{\frac{10^5}{2}} \approx \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} \approx 0.6065, \quad P(G) = 0.3935.$$

Bezeichnet T_i die Anzahl der Gewinne, die auf Los i entfallen, so gilt für $T := \sum_{i=1}^{10^5} T_i$ natürlich $T = 50\,000$. Daraus folgt

$$50\,000 = \mathbb{E}T = \sum_{i=1}^{10^5} \mathbb{E}T_i = 10^5\, \mathbb{E}T_1 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}T_i = \mathbb{E}T_1 = \frac{1}{2} \quad \forall\, i.$$

3. Sei $\{q_n : \ n \in \mathbb{N}\}$ eine Durchnummerierung der rationalen Zahlen. Berechnen Sie für $\mu(A) := \int_A \mathrm{e}^{-|\omega|}\, d\lambda(\omega) + \sum_{q_n \in A} 2^{-n},\ A \in \mathfrak{B}$ das Integral $\int \left(\omega^2\, \mathbb{1}_{\mathbb{Q}^c} + 1_{\mathbb{Q}} \right)\, d\mu$.

   Lösung: Sei $f := \mathrm{e}^{-|\omega|}\,,\ g(\omega) := \omega^2$ und $\nu(A) := \int_A \mathrm{e}^{-|\omega|}\, d\lambda(\omega)$, dann gilt $g = \omega^2\, \mathbb{1}_{\mathbb{Q}^c}$ ν–fü . Daraus folgt

$$\int \omega^2\, \mathbb{1}_{\mathbb{Q}^c}\, d\nu = \int g\, d\nu = \int f\, g\, d\lambda = 2 \int_0^\infty x^2\, \mathrm{e}^{-x} = 2\, \Gamma(3) = 2\, 2! = 4\,.$$

   $\int 1_{\mathbb{Q}}\, d\nu = 0$ und mit $\rho(A) := \sum_{q_n \in A} 2^{-n}$ gilt $\int 1_{\mathbb{Q}}\, d\rho = \sum_n 2^{-n} = 1\,.$ Daraus folgt $\int \omega^2\, \mathbb{1}_{\mathbb{Q}^c} + 1_{\mathbb{Q}}\, d\mu = 5\,.$

4. Man zeige, dass eine Zufallsvariable X genau dann integrierbar ist, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} P(|X| > n) < \infty$ und, dass dann gilt $\lim_{n \to \infty} n\, P(|X| > n) = 0$.
   Hinweis: Stellen Sie $P(|X| \geq n)$ als Summe von Wahrscheinlichkeiten dar, vertauschen Sie die Summationsreihenfolge und interpretieren Sie das Ergebnis als Integral einer diskreten Zufallsvariablen.

   Lösung:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} P(|X| > n) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} P(k < |X| \leq k+1) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} P(k < |X| < k+1) \sum_{n=1}^{k} 1 = \sum_{k=1}^{\infty} k\, P(k < |X| < k+1) = \int Y\, dP
\end{aligned}$$

   mit $Y := \sum_k k\, \mathbb{1}_{[k < |X| \leq k+1]}$. Da gilt $Y \leq |X| \leq Y + 1$ folgt daraus

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X| > n) = \int Y\, dP \leq \int |X|\, dP \leq \int Y {+} 1\, dP = 1 {+} \sum_{n=1}^{\infty} P(|X| > n),$$

woraus die 1-te Aussage trivialerweise folgt.

Aus $\sum_{n=1}^{\infty} P|X| > n) < \infty$ folgt, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ gibt mit $\sum_{n=n_\varepsilon}^{\infty} P|X| > n) < \varepsilon \Rightarrow (n - n_\varepsilon)\, P(|X| > n) \leq \sum_{n=n_\varepsilon}^{\infty} P|X| > n) < \varepsilon \ \forall\ n > n_\varepsilon$. Daher gilt $\limsup_n n\, P(|X| > n) = \lim_n \frac{n}{n-n_\varepsilon} \limsup_n (n - n_\varepsilon)\, P(|X| > n) \leq \varepsilon$.

Lösung 2: Aus $X \in \mathcal{L}_1$ folgt $P(|X| = \infty) = 0$, und dies impliziert $Y_n := n\, \mathbb{1}_{[|X| \geq n]} \searrow 0$ P fs und $0 \leq Y_n \leq |X| \in \mathcal{L}_1$. Daher folgt aus dem Konvergenzsatz von Lebegue

$$\lim_n \mathbb{E} Y_n = \lim_n n\, P(|X| \geq n) = \mathbb{E} \lim Y_n = 0.$$

5. Man beweise, dass für eine Folge integrierbarer Funktionen X_n mit $\sum_{n=1}^{\infty} \int |X_n|\, d\mu < \infty$ die Folge $\sum_{n=1}^{N} X_n$ μ-fü gegen eine integrierbare Funktion X konvergiert und dass gilt $\sum_{n=1}^{\infty} \int X_n\, d\mu = \int X\, d\mu$.

   Beweis:
$$\hat{X} := \sum_{n=1}^{\infty} |X_n| \geq \sum_{n=1}^{N} |X_n| \geq \left| \sum_{n=1}^{N} X_n \right| \tag{1}$$

$$\sum_{n=1}^{N} |X_n| \nearrow \sum_{n=1}^{\infty} |X_n| = \hat{X} \quad \text{(Konvergenz durch Monotonie)} \ \Rightarrow$$

$$\int \hat{X}\, d\mu = \int \lim_N \sum_{n=1}^{N} |X_n|\, d\mu = \lim_N \sum_{n=1}^{N} \int |X_n|\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int |X_n|\, d\mu < \infty \tag{2}$$

   Nun gilt mit $M < N \in \mathbb{N}$

$$\left| \sum_{n=1}^{N} X_n - \sum_{n=1}^{M} X_n \right| \leq \sum_{n=M}^{N} |X_n| \leq \sum_{n=M}^{\infty} |X_n| \to 0 \quad \text{wegen } \hat{X} < \infty$$

   Somit $\exists\ X := \lim_N \sum_{n=1}^{N} X_n$. Aus (1) und (2) folgt, dass der Satz über die Konvergenz durch Majorisierung angewendet werden kann und damit gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int X_n\, d\mu = \lim_N \sum_{n=1}^{N} \int X_n\, d\mu = \lim_N \int \sum_{n=1}^{N} X_n\, d\mu = \int X\, d\mu\,.$$

6. Man zeige, dass aus $X_n \sim Ex_{\tau_n}$ und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\tau_n} < \infty$ folgt

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n < \infty \; P \text{ fs.}$$

Lösung: Aus $X_n \geq 0$ folgt $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i \nearrow \sum\limits_{i=1}^{\infty} X_i$, sodass aus der Konvergenz durch Monotonie mit $Y := \sum\limits_{i=1}^{\infty} X_i$ folgt

$$\mathbb{E}Y = \mathbb{E}\sum_{i=1}^{\infty} X_i = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}X_i = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\tau_i} < \infty \Rightarrow Y < \infty P\text{–fs.}$$

7. Man beweise, dass für integrierbare Funktionen $g_n \leq f_n \leq h_n$ mit $\lim\limits_n g_n = g$ μ-fü, $\lim\limits_n f_n = f$ μ-fü und $\lim\limits_n h_n = h$ μ-fü, wobei g und h integrierbar sind, aus $\lim\limits_n \int g_n \, d\mu = \int g \, d\mu \;\wedge\; \lim\limits_n \int h_n \, d\mu = \int h \, d\mu$ folgt

$$\lim_n \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu \in \left[\int g \, d\mu \, , \int h \, d\mu \right] .$$

Beweis: Aus $g_n \leq f_n \leq h_n$ folgt $g \leq f \leq h$ μ-fü $\Rightarrow$ $g^- \geq f^- \wedge f^+ \leq h^+$. Somit ist f integrierbar mit $\int f \, d\mu \in \left[\int g \, d\mu \, , \int h \, d\mu \right]$.

Aus dem Lemma von Fatou und der Additivität des Integrals folgt

$$\begin{aligned} \int f \, d\mu - \int g \, d\mu &= \int (f - g) \, d\mu \leq \liminf \int (f_n - g_n) \, d\mu \\ &= \liminf \int f_n \, d\mu - \lim \int g_n \, d\mu = \liminf \int f_n \, d\mu - \int g \, d\mu \end{aligned} \tag{3}$$

bzw.

$$\begin{aligned} \int h \, d\mu - \int f \, d\mu &= \int (h - f) \, d\mu \leq \liminf \int (h_n - f_n) \, d\mu \\ &= \lim \int h_n \, d\mu - \limsup \int f_n \, d\mu = \int h \, d\mu - \limsup \int f_n \, d\mu \end{aligned} \tag{4}$$

(3) und (4) implizieren nun

$$\liminf \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu = \limsup \int f_n \, d\mu \, .$$