2. Übung aus Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie
WS 2015

1. Sei $\{q_n : \; n \in \mathbb{N}\}$ eine Durchnummerierung der rationalen Zahlen. Welche der Fuktionen $f_n := 1_{\{q_1,\dots,q_n\}}$, $f := 1_{\mathbb{Q}}$ und $g := \sum\limits_i 2^{-i}\, 1_{\{q_i\}}$ sind (uneigentlich) Riemann-integrierbar und/oder Lebesgue-integrierbar? Berechnen Sie die Integrale, sofern das sinnvoll ist. Was sagt das Beispiel über die Gültigkeit der Konvergenzsätze (Satz von Levi, bzw. Lebesgue) für Folgen Riemann-integrierbarer Funktionen aus?

2. Sei $\{q_n : \; n \in \mathbb{N}\}$ eine Durchnummerierung der rationalen Zahlen aus $\Omega := [0,1]$ und $f_k(\omega) := \sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\,(\omega - q_n)^2\,[1 - (\omega - q_n)^2]^{k-1}$ sowie $f := \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$. Sind die f_k bzw. f Riemann-integrierbar auf Ω ?

3. Man zeige, dass eine auf $[0,1]$ λ–fü stetige und beschränkte Funktion f (d.h. f ist Riemann-integrierbar) nicht Borel-messbar sein muss. *Hinweis:* Die Cantor-Menge C enthält, wie im Buch gezeigt, eine Menge $A \notin \mathfrak{B}$. Welche Unstetigkeitsstellen hat 1_A ?

4. Man berechne $\int 1_{C(\varepsilon)}\, d\lambda$, wobei die Menge $C(\varepsilon),\ 0 < \epsilon < \frac{1}{3}$ mit Hilfe der untenstehenden Rekursion gebildet wird, und zeige, dass $1_{C(\varepsilon)}$ nicht Riemann-integrierbar ist.

$$
\begin{aligned}
l_0 &:= 0, \quad a_{0,1} := 0,\ b_{0,1} := 1,\ C_0 := I_{0,1} := [a_{0,1}, b_{0,1}],\\
l_n &:= \varepsilon^n, \quad a_{n,2i-1} := a_{n-1,i},\ b_{n,2i-1} := \frac{a_{n-1,i} + b_{n-1,i} - l_n}{2},\\
&\quad a_{n,2i} := \frac{a_{n-1,i} + b_{n-1,i} + l_n}{2},\ b_{n,2i} := b_{n-1,i}\ 1 \le i \le 2^{n-1},\\
&\quad I_{n,j} := [a_{n,j}, b_{n,j}], \quad 1 \le j \le 2^n,
\end{aligned}
$$

$$
C_n := \bigcup_{j=1}^{2^n} I_{n,j}, \quad C := C(\varepsilon) := \bigcap_n C_n.
$$

5. Man zeige $f(x) \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, \mathfrak{B}) \Leftrightarrow g_a(x) := f(x+a) \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$, $\forall a \in \mathbb{R}$. Weiters zeige man dass das Integral $\int f\, d\lambda$ genau dann existiert, wenn $\int g_a\, d\lambda$ für jedes $a \in \mathbb{R}$ existiert und dass dann gilt $\int f\, d\lambda = \int g_a\, d\lambda$.

6. $(X_1, X_2) \sim N(0,0,1,1,0)$ Man bestimme die gemeinsame Verteilung und die Randverteilungen von $Y_1 := X_1 + X_2, Y_2 = X_1 - X_2$ Sind Y_1, Y_2 unabhängig?

7. In einer Urne befinden sich 2 weiße und 8 schwarze Kugeln. Spieler A zieht solange ohne Zurücklegen aus der Urne, bis er die erste weiße Kugel erwischt. Danach zieht B bis zur 2-ten weißen Kugel. Dabei muss jeder Spieler dem Gegner pro Zug einen Euro zahlen. Ist das Spiel fair?

   Hinweis: Stellen Sie sich vor, Sie ziehen, bis die Urne leer ist und legen die Kugeln kreisförmig auf, wobei Sie den Beginn der Ziehungen mit einer zusätzlichen besonders gekennzeichneten Kugel markieren. Betrachten Sie nun die Anzahl der Kugeln bis einschließlich der 1-ten weißen Kugel, die Anzahl der Kugeln von dort weg bis einschließlich der 2-ten weißen Kugel und die Anzahl der restlichen Kugeln bis einschließlich der markierten Kugel.