2. Übung aus Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie
WS 2015

1. Sei $\{q_n : \; n \in \mathbb{N}\}$ eine Durchnummerierung der rationalen Zahlen. Welche der Fuktionen $f_n := \mathbb{1}_{\{q_1,\ldots,q_n\}}$, $f := \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ und $g := \sum\limits_i 2^{-i}\, \mathbb{1}_{\{q_i\}}$ sind (uneigentlich) Riemann-integrierbar und/oder Lebesgue-integrierbar? Berechnen Sie die Integrale, sofern das sinnvoll ist. Was sagt das Beispiel über die Gültigkeit der Konvergenzsätze (Satz von Levi, bzw. Lebesgue) für Folgen Riemann-integrierbarer Funktionen aus?

   Lösung: $\int f_n(\omega)\, d\omega = \int f_n \, d\lambda = \int f \, d\lambda = 0$. und $f_n \nearrow f$, $|f_n| \leq |f| \quad \forall n$. Daher gelten beide Konvergenzsätze in bezug auf das Lebesgue-Integral, aber f ist nicht Riemann-integrierbar.

   g ist Riemann-integrierbar, denn g ist auf $\mathbb{Q}^c$ stetig, also λ-fü stetig. $r \notin \mathbb{Q}$ und $\varepsilon > 0$. $\quad n_\varepsilon := \max\{n : \; 2^{-n} \geq \varepsilon\}$ und $\delta := \min\limits_{1 \leq n \leq n_\varepsilon} |r - q_n|$, Dann gilt $|g(r) - g(\omega)| < \varepsilon$ für alle $\omega \in (r - \delta, r + \delta)$.

2. Sei $\{q_n : \; n \in \mathbb{N}\}$ eine Durchnummerierung der rationalen Zahlen aus $\Omega := [0,1]$ und $f_k(\omega) := \sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\, (\omega - q_n)^2\, [1 - (\omega - q_n)^2]^{k-1}$ sowie $f := \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$. Sind die f_k bzw. f Riemann-integrierbar auf Ω ?

   Lösung: Wegen $0 \leq f_{k,n} := 2^{-n}\, (\omega - q_n)^2\, [1 - (\omega - q_n)^2]^{k-1} \leq 2^{-n}$ gilt $0 \leq f_k \leq 1$.

   Zu $\varepsilon > 0 \; \exists n_\varepsilon : \; t_\varepsilon(\omega) := \sum\limits_{n > n_\varepsilon}^{\infty} f_{k,n}(\omega) \leq \sum\limits_{n > n_\varepsilon}^{\infty} 2^{-n} < \varepsilon \quad \forall\, \omega \in \Omega$. Die endliche Summe $s(\omega) := s_\varepsilon(\omega) := \sum\limits_{n \leq n_\varepsilon} f_{k,n}(\omega)$ ist stetig in ω , d.h. aus $|\omega - \omega'| < \delta$ folgt $|s(\omega) - s(\omega')| < \varepsilon$. Damit gilt aber

$$
\begin{aligned}
|f_k(\omega) - f_k(\omega')| &\leq |f_k(\omega) - s(\omega)| + |s(\omega) - s(\omega')| + |s(\omega') - f_k(\omega')| \\
&\leq |t_\varepsilon(\omega)| + \varepsilon + |t_\varepsilon(\omega')| \leq 3\,\varepsilon\,.
\end{aligned}
$$

   Somit sind die f_k stetig und Riemann-integrierbar auf $[0,1]$.

   Da die Doppelsumme $f(\omega) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_{k,n}$ lauter positive Summanden hat, ergibt Vertauschung der Summantionsreihenfolge für $\omega \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$

$$
\begin{aligned}
f(\omega) &= \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\, (\omega - q_n)^2 \sum_{k=1}^{\infty} [1 - (\omega - q_n)^2]^{k-1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\, (\omega - q_n)^2\, \frac{1}{(\omega - q_n)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 1\,.
\end{aligned}
$$

Für $\omega = q_i$ gilt

$$\begin{aligned} f(\omega) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n \neq i} f_{k,n} = \sum_{n \neq i} \sum_{k=1}^{\infty} f_{k,n} \\ &= \sum_{n \neq i} 2^{-n} (\omega - q_n)^2 \frac{1}{(\omega - q_n)^2} = \sum_{n \neq i} 2^{-n} = 1 - 2^{-i} . \end{aligned}$$

Somit ist f gemäß der Argumentation in Bsp 1 λ-fü stetig und Riemann-integrierbar mit $\int f(\omega)\, d\omega = 1$.

3. Man zeige, dass eine auf $[0, 1]$ λ–fü stetige und beschränkte Funktion f (d.h. f ist Riemann-integrierbar) nicht Borel-messbar sein muss.
   Hinweis: Die Cantor-Menge C enthält, wie im Buch gezeigt, eine Menge $A \notin \mathfrak{B}$. Welche Unstetigkeitsstellen hat 1_A ?

   Lösung: Für jede Menge $A \subseteq \mathbb{R}^k$ stimmt die Menge der Unstetigkeitsstellen von $\mathbb{1}_A$ überein mit dem Rand ∂A .

   Gilt $\vec{x} \in \overset{\circ}{A}$ und $\lim_n \vec{x}_n = \vec{x}$, so liegen fast alle Glieder von $(\vec{x}_n)$ in $\overset{\circ}{A}$. Daher gilt $\lim_n \mathbb{1}_A(\vec{x}_n) = 1 = \mathbb{1}_A(\vec{x})$. Aus $\vec{x} \in \bar{A}^c$ und $\lim_n \vec{x}_n = \vec{x}$ folgt mit demselben Argument $\lim_n \mathbb{1}_A(\vec{x}_n) = 0 = \mathbb{1}_A(\vec{x})$. Daher gilt $\overset{\circ}{A} \cup \bar{A}^c \subseteq S$, der Menge der Stetigkeitspunkte von $\mathbb{1}_A$, bzw. $S^c \subseteq \partial A$.
   Gilt umgekehrt $\vec{x} \in A \cap \partial A$, so liegt $\vec{x}$ nicht in $\overset{\circ}{A}$. Daher gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ $\quad K(\vec{x}, \frac{1}{n}) \cap A^c \neq \emptyset$. Somit gibt es zu jedem n ein $\vec{x}_n \in A^c$ mit $\|\vec{x}_n - \vec{x}\| < \frac{1}{n}$. Für die Folge $(\vec{x}_n)$ gilt demnach $\lim_n \vec{x}_n = \vec{x}$ und $\lim_n \mathbb{1}_A(\vec{x}_n) = 0 \neq \mathbb{1}_A(\vec{x}) = 1$.
   Gilt $\vec{x} \in A^c \cap \partial A$, so gibt es wegen $\vec{x} \in \bar{A}$ zu jedem n ein $\vec{x}_n \in A$ mit $\|\vec{x}_n - \vec{x}\| < \frac{1}{n}$. Somit gilt $\lim_n \vec{x}_n = \vec{x}$ und $\lim_n \mathbb{1}_A(\vec{x}_n) = 1 \neq \mathbb{1}_A(\vec{x}) = 0$.
   Damit ist auch $\partial A \subseteq S^c$ bewiesen.

   C ist abgeschlossen. Somit $\partial A \subseteq C$ und $\lambda(C) = 0 \ \Rightarrow\ \int \mathbb{1}_A \, dx = 0$.

4. Man berechne $\int \mathbb{1}_{C(\varepsilon)}\, d\lambda$, wobei die Menge $C(\varepsilon),\ 0 < \epsilon < \frac{1}{3}$ mit Hilfe der untenstehenden Rekursion gebildet wird, und zeige, dass $\mathbb{1}_{C(\varepsilon)}$ nicht Riemann-integrierbar ist.

$$l_0 := 0, \quad a_{0,1} := 0,\ b_{0,1} := 1,\ C_0 := I_{0,1} := [a_{0,1}, b_{0,1}],$$

$$l_n := \varepsilon^n, \quad a_{n,2\,i-1} := a_{n-1,i},\ b_{n,2\,i-1} := \frac{a_{n-1,i} + b_{n-1,i} - l_n}{2}, \tag{1}$$

$$a_{n,2\,i} := \frac{a_{n-1,i} + b_{n-1,i} + l_n}{2},\ b_{n,2\,i-1} := b_{n-1,i}, \tag{2}$$

$$I_{n,i} := [a_{n,i}, b_{n,i}], \quad 1 \leq i \leq 2^n, \tag{3}$$

$$C_n := \bigcup_{i=1}^{2^n} I_{n,i}, \quad C := C(\varepsilon) := \bigcap_n C_n.$$

Hinweis: Welche Unstetigkeitsstellen besitzt ein Indikator $\mathbb{1}_C$?

Beweis: Die C_n sind abgeschlossen, daher ist auch C abgeschlossen, d.h. es gilt $\overline{C} = C$.
Für $J_{n,i} := (b_{n,2\,i-1}, a_{n,2\,i}),\ 1 \leq i \leq 2^{n-1}$ gilt definitionsgemäß $J_{n,i} \subset C_n^c$, und aus (1) und (2) folgt $\lambda(J_{n,i}) = l_n \ \forall\ 1 \leq i \leq 2^{n-1}$ sowie

$$I_{n-1,i} = I_{n,2\,i-1} \cup I_{n,2\,i} \cup J_{n,i} \quad \forall\ 1 \leq i \leq 2^{n-1}. \tag{4}$$

Daher gilt $C_n \subset C_{n-1}$ und $\lambda(C_n) = \lambda(C_{n-1}) - 2^{n-1}\, l_n = \lambda(C_{n-1}) - 2^{n-1}\,\varepsilon^n$. Daraus folgt mit vollständiger Induktion

$$\lambda(C_n) = 1 - \sum_{i=1}^{n} 2^{i-1}\, l_i = 1 - \frac{\varepsilon\ (1-(2\,\varepsilon)^n\,)}{1-2\,\varepsilon}. \tag{5}$$

Somit gilt

$$\int \mathbb{1}_C\, d\lambda = \lambda(C) = \lim_n \lambda(C_n) = 1 - \frac{\varepsilon}{1-2\,\varepsilon} = \frac{1-3\,\varepsilon}{1-2\,\varepsilon} > 0. \tag{6}$$

Aus $x \in C \cap (a,b)$ folgt $x \in C_n \quad \forall\, n$. Daher gibt es ein $I_{n,i}$ mit $x \in I_{n,i}$ und $\lambda(I_{n,i}) < |x-a| \wedge |x-b|$. Wegen $J_{n+1,i} \subset I_{n,i} \subset (a,b)$ und $J_{n+1,i} \subset C_{n+1}^c \subset C^c$ gilt $(a,b) \cap C^c \neq \emptyset \ \Rightarrow\ x \notin \overset{\circ}{C} \ \Rightarrow\ \overset{\circ}{C} = \emptyset$. Daher gilt $\partial C = \overline{C} \setminus \overset{\circ}{C} = C$. Das impliziert $\lambda(\partial C) = \lambda(C) > 0$, d.h. $\mathbb{1}_C$ ist nicht λ–fü stetig und damit nicht Riemann-integrierbar.

5. Man zeige $f(x) \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, \mathfrak{B}) \ \Leftrightarrow\ g_a(x) := f(x+a) \in \mathcal{M}(\mathbb{R}, \mathfrak{B})\,,\ \forall a \in \mathbb{R}$. Weiters zeige man dass das Integral $\int f\, d\lambda$ genau dann existiert, wenn $\int g_a\, d\lambda$ für jedes $a \in \mathbb{R}$ existiert und dass dann gilt $\int f\, d\lambda = \int g_a\, d\lambda$.

   Lösung: $g_a = f \circ G_a$ mit $G_a(x) := x+a$. Da G_a stetig ist, ist die Zusammensetzung messbar. Ist umgekehrt g_a messbar, so ist $f = g_a \circ G_a^{-1}$ und daher ebenfalls messbar.

   Aus der Translationsinvarianz von λ folgt $\lambda G_a^{-1} = \lambda$. Daher folgt aus dem allgemeinen Transformationssatz

$$\int g_a\, d\lambda = \int f \circ G_a d\lambda = \int f\, d\lambda G_a^{-1} = \int f\, d\lambda\,.$$

6. $(\,X_1, X_2\,) \sim N(0,0,1,1,0)$ Man bestimme die gemeinsame Verteilung und die Randverteilungen von
   $Y_1 := X_1 + X_2, Y_2 = X_1 - X_2$ Sind Y_1, Y_2 unabhängig?

$$X_1 + X_2 \sim N(0,2)\,,\ X_1 - X_2 \sim N(0,2)\,.$$

$$X_1 = \frac{Y_1 + Y_2}{2}\ ,\ X_2 = \frac{Y_1 - Y_2}{2} \ \Rightarrow\ detT = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}\,, & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\,, & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\,.$$

$$\Rightarrow\ f_{Y_1\,,Y_2}(y_1\,,y_2) = \frac{1}{4\,\pi}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y_1^2+2\,y_1\,y_2+y_2^2+y_1^2-2\,y_1\,y_2+y_2^2}{4}\right)} = \frac{1}{4\,\pi}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y_1^2+y_2^2}{2}\right)}$$

Y_1 und Y_2 sind also unabhängig.

7. In einer Urne befinden sich 2 weiße und 8 schwarze Kugeln. Spieler A zieht solange ohne Zurücklegen aus der Urne, bis er die erste weiße Kugel erwischt. Danach zieht B bis zur 2-ten weißen Kugel. Dabei muss jeder Spieler dem Gegner pro Zug einen Euro zahlen. Ist das Spiel fair?

   Hinweis: Stellen Sie sich vor, Sie ziehen, bis die Urne leer ist und legen die Kugeln kreisförmig auf, wobei Sie den Beginn der Ziehungen mit einer zusätzlichen besonders gekennzeichneten Kugel markieren. Betrachten Sie nun die Anzahl der Kugeln bis einschließlich der 1-ten weißen Kugel, die Anzahl der Kugeln von dort weg bis einschließlich der 2-ten weißen Kugel und die Anzahl der restlichen Kugeln bis einschließlich der markierten Kugel.

   Lösung: $X_1 \ldots$ Ziehungen bis 1-te weiße Kugel
   $X_2 \ldots$ Ziehungen bis 2-te weiße Kugel
   $X_3 \ldots$ Rest + Startkugel
   $X_1 + X_2 + X_3 = 11$
   X_i sind identisch verteilt $\Rightarrow \mathbb{E}X_1 = \mathbb{E}X_2 = \mathbb{E}X_3$
   $\mathbb{E}\sum_{i=1}^{3} X_i = 3\,\mathbb{E}X_i = 11 \ \Rightarrow\ \mathbb{E}X_i = \frac{11}{3}\,.$