3. Übung aus Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie
WS 2015

1. Man zeige, dass für jede Familie von Funktionen $X_t : \Omega \to \mathbb{R}\,,\ t \in T$ gilt
$$\mathfrak{S}(X_t : t \in T) = \bigcup_{S \subseteq T, |S| \leq \aleph_0} \mathfrak{S}(X_s : s \in S)\,.$$

2. Man beweise, dass für $\emptyset \neq \mathfrak{C}_i \subseteq \mathfrak{P}(\Omega_i)\,,\ i = 1,2$ auf $\Omega_1 \times \Omega_2$ gilt
$$\mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{C}_1) \otimes \mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{C}_2) = \mathfrak{A}_\sigma(\{C_1 \times \Omega_2\,, \Omega_1 \times C_2 :\ C_i \in \mathfrak{C}_i\})\,,$$
Gibt es Mengen $C_{i,n}$ aus $\mathfrak{C}_i\,, i = 1,2$ mit $\Omega_i = \bigcup\limits_n C_{i,n}$, so gilt auch
$$\mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{C}_1) \otimes \mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{C}_2) = \mathfrak{A}_\sigma(\{C_1 \times C_2 :\ C_i \in \mathfrak{C}_i\})\,.$$

3. Ist $(\Omega\,, \mathfrak{S})$ ein Messraum und $D := \{(x,x) :\ x \in \Omega\} \in \mathfrak{S} \otimes \mathfrak{S}$, so zeige man, dass es ein $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{S}\,, |\mathfrak{C}| \leq \aleph_0$ gibt mit $D \in \mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{C}) \otimes \mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{C})$ und $\{x\} \in \mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{C})$ für alle $x \in \Omega$.
Hinweis: $\mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{H}) = \bigcup\limits_{\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{H}\,,\ |\mathfrak{G}| \leq \aleph_0} \mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{G})$

4. Ist $f(\omega_1, \omega_2) := \begin{cases} 1, & 0 \leq \omega_1 < \infty\,,\ \omega_1 < \omega_2 \leq \omega_1 + 1 \\ -1, & 0 \leq \omega_1 < \infty\,,\ \omega_1 + 1 < \omega_2 \leq \omega_1 + 2 \end{cases}$ auf dem Maßraum $(\mathbb{R}^2\,, \mathfrak{B}_2\,, \lambda_2)$ integrierbar? Berechnen Sie die iterierten Integrale $\int \left[\int f(\omega_1, \omega_2)\, \lambda(d\omega_2)\right]\ \lambda(d\omega_1)$ und $\int \left[\int f(\omega_1, \omega_2)\, \lambda(d\omega_1)\right]\ \lambda(d\omega_2)$.

5. Man zeige, dass für eine Verteilungsfunktion F i.e.S. auf $\mathbb{R}$ gilt
$$\int F(x+c) - F(x)\, \lambda(dx) = c\,,\ \forall\, c \in \mathbb{R}\,.$$

6. Ist $(\Omega\,, \mathfrak{S}\,, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum und $f \in \mathcal{M}^+(\Omega\,, \mathfrak{S})$, so gilt
$$\int f\, d\mu = \int_{[0\,,\infty)} \mu\,(\,[\,f \geq t\,]\,)\ \lambda(dt)\,.$$

7. Man zeige, dass für die Kugeln $V_k(r) := \left\{(x_1, \ldots, x_k) :\ \sum\limits_{i=1}^k x_i^2 \leq r^2\right\}$ die Rekursion $\lambda_k(V_k(1)) = \frac{2\,\pi}{k}\, \lambda_{k-2}(V_{k-2}(1)\,)\,, k > 2$ gilt, aus der folgt
$$\lambda_{2k}(V_{2k}(1)) = \frac{(2\,\pi)^k}{\prod\limits_{i=1}^k (2\,i)}\,, \quad \lambda_{2k-1}(V_{2k-1}(1)) = \frac{2\,(2\,\pi)^{k-1}}{\prod\limits_{i=1}^k (2\,i - 1)}\,. \tag{1}$$
Hinweis: Man berechne $\lambda_k(V_k(1))$ als Integral über die Volumina der Schnitte $V_k(1)_{(x_1,x_2)}$ und beachte, dass $V_k(r)$ durch eine lineare Transformation aus $V_k(1)$ hervorgeht.