# 3. Übung aus Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie
# WS 2015

1. Man zeige, dass für jede Familie von Funktionen $X_t : \Omega \to \mathbb{R}\,,\ t \in T$ gilt
$$\mathfrak{S}(X_t : t \in T) = \bigcup_{S \subseteq T, |S| \leq \aleph_0} \mathfrak{S}(X_s : s \in S)\,.$$

   *Bew.:* Für alle $S \subseteq T$ gilt $\mathfrak{S}(X_s : s \in S) \subseteq \mathfrak{S}(X_t : t \in T)$. Daraus folgt
$$\mathfrak{U} := \bigcup_{S \subseteq T, |S| \leq \aleph_0} \mathfrak{S}(X_s : s \in S) \subseteq \mathfrak{S}(X_t : t \in T).$$

   $\emptyset \in \mathfrak{U}$, $\Omega \in \mathfrak{U}$,
   $A \in \mathfrak{U} \ \Rightarrow\ \exists\, S_A \subset T, |S_A| \leq \aleph_0 :\ A \in \mathfrak{S}(X_s : s \in S_A)$. Da das System $\mathfrak{S}(X_s : s \in S_A)$ eine $\sigma$-Algebra ist, folgt daraus $A^c \in \mathfrak{S}(X_s : s \in S_A)$.
   $A_n \in \mathfrak{U} \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \ \Rightarrow\ \exists\, S_n \subset T, |S_n| \leq \aleph_0 :\ A_n \in \mathfrak{S}(X_s : s \in S_n)\ \forall\, n$.
   Aus $A_n \in \mathfrak{S}(X_s : s \in S) \quad \forall\, n$ mit $S := \bigcup\limits_n S_n$ und $|S| \leq \aleph_0$ folgt aber $\bigcup\limits_n A_n \in \mathfrak{S}(X_s : s \in S) \ \Rightarrow\ \bigcup\limits_n A_n \in \mathfrak{U}$. Somit ist $\mathfrak{U}$ eine $\sigma$-Algebra, und wegen $\mathfrak{S}(X_t) \subseteq \mathfrak{U} \quad \forall\, t \in T$ folgt daraus $\mathfrak{S}(X_t : t \in T) \subseteq \mathfrak{U}$.

2. Man beweise, dass für $\emptyset \neq \mathfrak{C}_i \subseteq \mathfrak{P}(\Omega_i)\,,\ i = 1, 2$ auf $\Omega_1 \times \Omega_2$ gilt
$$\mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{C}_1) \otimes \mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{C}_2) = \mathfrak{A}_\sigma(\{C_1 \times \Omega_2\,, \Omega_1 \times C_2 :\ C_i \in \mathfrak{C}_i\})\,,$$

   Gibt es Mengen $C_{i,n}$ aus $\mathfrak{C}_i\,, i = 1, 2$ mit $\Omega_i = \bigcup\limits_n C_{i,n}$ , so gilt auch
$$\mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{C}_1) \otimes \mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{C}_2) = \mathfrak{A}_\sigma(\{C_1 \times C_2 :\ C_i \in \mathfrak{C}_i\})\,.$$

   *Beweis:* Für $f_i : \Omega \to \Omega_i\,,\ i \in I$ und $\mathfrak{C}_i \neq \emptyset$ auf $\Omega_i$ gilt (siehe Vorlesung)
$$\mathfrak{A}_\sigma\left(\bigcup_i f^{-1}(\mathfrak{C}_i)\right) = \mathfrak{A}_\sigma\left(\bigcup_i f^{-1}(A_\sigma(\mathfrak{C}_i)\,)\right)\,.$$

   Wegen $\mathrm{pr}_1(C_1) = C_1 \times \Omega_2$ bzw. $\mathrm{pr}_2(C_2) = \Omega_1 \times C_2$ ergibt das angewendet auf $\mathrm{pr}_i : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \Omega_i$
$$\begin{aligned}\mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{C}_1) \otimes \mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{C}_2) &= \mathfrak{A}_\sigma(\,\mathrm{pr}_1^{-1}(\mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{C}_1)) \cup \mathrm{pr}_2^{-1}(\mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{C}_2))\,)\\ &= \mathfrak{A}_\sigma(\,\mathrm{pr}_1^{-1}(\mathfrak{C}_1) \cup \mathrm{pr}_2^{-1}(\mathfrak{C}_2)\,) = \mathfrak{A}_\sigma(\,\{C_1 \times \Omega_2\,, \Omega_1 \times C_2 :\ C_i \in \mathfrak{C}_i\})\,.\end{aligned}$$

   Wegen $\{C_1 \times C_2 :\ C_i \in \mathfrak{C}_i\} \subseteq \mathfrak{A} := \{A_1 \times A_2 :\ A_i \in \mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{C}_i)\}$ gilt
$$\mathfrak{A}_\sigma(\{C_1 \times C_2 :\ C_i \in \mathfrak{C}_i\}) \subseteq \mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{C}_1) \otimes \mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{C}_2)\,.$$

Umgekehrt gilt $C_1 \times \Omega_2 = \bigcup_n (C_1 \times C_{2,n}) \in \mathfrak{A}_\sigma(\{C_1 \times C_2 : \ C_i \in \mathfrak{C}_i\})$ und $\Omega_1 \times C_2 = \bigcup_n (C_{1,n} \times C_2) \in \mathfrak{A}_\sigma(\{C_1 \times C_2 : \ C_i \in \mathfrak{C}_i\})$. Daraus folgt

$$\mathfrak{A}_\sigma(\{C_1 \times \Omega_2 \, , \Omega_1 \times C_2 : \ C_i \in \mathfrak{C}_i\}) \subseteq \mathfrak{A}_\sigma(\{C_1 \times C_2 : \ C_i \in \mathfrak{C}_i\}) \, .$$

Die linke Seite stimmt, wie oben gezeigt, überein mit $\mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{C}_1) \otimes \mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{C}_2)$, also gilt $\mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{C}_1) \otimes \mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{C}_2) = \mathfrak{A}_\sigma(\{C_1 \times C_2 : \ C_i \in \mathfrak{C}_i\})$.

3. Ist $(\Omega \, , \mathfrak{S})$ ein Messraum und $D := \{(x, x) : \ x \in \Omega\}$, so zeige man, dass es ein $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{S} \, , |\mathfrak{C}| \leq \aleph_0$ gibt mit $D \in \mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{C}) \otimes \mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{C})$ und $\{x\} \in \mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{C})$ für alle $x \in \Omega$, wenn $D \in \mathfrak{S} \otimes \mathfrak{S}$.
   *Hinweis:* $\mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{H}) = \bigcup\limits_{\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{H} \, , \, |\mathfrak{G}| \leq \aleph_0} \mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{G})$

   *Beweis:* $\mathfrak{S} \otimes \mathfrak{S} = \mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{H})$ mit $\mathfrak{H} := \{A \times B : \ A, B \in \mathfrak{S}\}$. Zu $D \in \mathfrak{S} \otimes \mathfrak{S}$ gibt es daher ein $\mathfrak{G} = \{G_n \times H_n : \ n \in \mathbb{N} , \ G_n \, , H_n \in \mathfrak{S}\}$, sodass gilt $D \in \mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{G}) \subseteq \mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{K})$ mit $\mathfrak{K} := \{G_n \times H_n \, , G_n \times H_n^c \, , G_n^c \times H_n \, , G_n^c \times H_n^c\}$. Nach Bsp 2. gilt $\mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{K}) = \mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{C}) \otimes \mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{C})$ mit $\mathfrak{C} := \{G_n \, , G_n^c \, , H_n \, , H_n^c\}$. Aus $D \in \mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{C}) \otimes \mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{C})$ folgt aber $D_x = \{x\} \in \mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{C}) \quad \forall \, x \in \Omega$.

4. Ist $f(\omega_1, \omega_2) := \begin{cases} 1, & 0 \leq \omega_1 < \infty \, , \ \omega_1 < \omega_2 \leq \omega_1 + 1 \\ -1, & 0 \leq \omega_1 < \infty \, , \ \omega_1 + 1 < \omega_2 \leq \omega_1 + 2 \end{cases}$ auf dem Maßraum $(\mathbb{R}^2 \, , \mathfrak{B}_2 \, , \lambda_2)$ integrierbar? Berechnen Sie die iterierten Integrale $\int \left[\int f(\omega_1, \omega_2) \, \lambda(d\omega_2)\right] \ \lambda(d\omega_1)$ und $\int \left[\int f(\omega_1, \omega_2) \, \lambda(d\omega_1)\right] \ \lambda(d\omega_2)$.

   *Lösung:* $f^+ = \mathbb{1}_A$ mit $A := \{(\omega_1, \omega_2) : \ 0 \leq \omega_1 \, , \ \omega_1 < \omega_2 \leq \omega_1 + 1\}$ und $f^- = \mathbb{1}_B$ mit $B := \{(\omega_1, \omega_2) : \ 0 \leq \omega_1 \, , \ \omega_1 + 1 < \omega_2 \leq \omega_1 + 2\}$. Daraus folgt $\int f^+ \, d\lambda_2 = \lambda_2(A) = \infty$ und $\int f^- \, d\lambda_2 = \lambda_2(B) = \infty$. Somit existiert das Integral nicht.

   $(A \cup B)_{\omega_1} = (\omega_1 \, , \omega_1 + 1] \cup (\omega_1 + 1 \, , \omega_1 + 2] \quad \forall \, \omega_1 > 0$. Daraus folgt $\int f(\omega_1, \omega_2) \, \lambda(d\omega_2) = \int\limits_{\omega_1}^{\omega_1+1} 1 \, d\lambda(\omega_2) - \int\limits_{\omega_1+1}^{\omega_1+2} 1 \, d\lambda(\omega_2) = 0 \quad \forall \, \omega_1 > 0$. Somit gilt $\int \left[\int f(\omega_1, \omega_2) \, \lambda(d\omega_2)\right] \ \lambda(d\omega_1) = 0$.

$$(A \cup B)_{\omega_2} = \begin{cases} (0, \omega_2] \, , & 0 < \omega_2 \leq 1 \\ (0, \omega_2 - 1] \cup (\omega_2 - 1 \, , \omega_2] \, , & 1 < \omega_2 \leq 2 \\ (\omega_2 - 2, \omega_2 - 1] \cup (\omega_2 - 1 \, , \omega_2] \, , & 2 < \omega_2 \, . \end{cases}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
&\int \left[\int f(\omega_1,\omega_2)\,\lambda(d\omega_1)\right]\,\lambda(d\omega_2)\\
&\quad= \int\limits_0^1 \left[\int\limits_0^{\omega_2} 1\,d\lambda(\omega_1)\right]\,d\lambda(\omega_2) + \int\limits_1^2 \left[\int\limits_0^{\omega_2-1} (-1)\,d\lambda(\omega_1) + \int\limits_{\omega_2-1}^{\omega_2} 1\,d\lambda(\omega_1)\right]\,d\lambda(\omega_2)\\
&\quad+ \int\limits_2^\infty \left[\int\limits_{\omega_2-2}^{\omega_2-1} (-1)\,d\lambda(\omega_1) + \int\limits_{\omega_2-1}^{\omega_2} 1\,d\lambda(\omega_1)\right]\,d\lambda(\omega_2)\\
&\quad= \int\limits_0^1 \omega_2\,d\lambda(\omega_2) + \int\limits_1^2 (2-\omega_2)\,d\lambda(\omega_2) + \int\limits_2^\infty (1-1)\,d\lambda(\omega_2) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1\,.
\end{aligned}$$

5. Man zeige, dass für eine Verteilungsfunktion $F$ i.e.S. auf $\mathbb{R}$ gilt

$$\int F(x+c)-F(x)\,\lambda(dx) = c\,,\ \forall\, c\in\mathbb{R}\,.$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
&\int F(x+c)-F(x)\,\lambda(dx) = \int \left[\int \mathbb{1}_{(x\,,x+c]}(\omega)\,P_F(d\omega)\right]\lambda(dx)\\
&\quad= \int \left[\int \mathbb{1}_{(x\,,x+c]}(\omega)\,\lambda(dx)\right]P_F(d\omega) = \int \left[\int_{[\omega-c\,,\omega)} 1\,\lambda(dx)\right]P_F(d\omega)\\
&\quad= \int c\,P_F(d\omega) = c\,.
\end{aligned}$$

$C := \{(\omega\,,x):\ x\in\mathbb{R}\,,\ x<\omega\le x+c\}$
$\Rightarrow\ C_x = (x\,,x+c]\ \wedge\ C_\omega = [\omega-c\,,\omega)\,.$

6. Ist $(\Omega\,,\mathfrak{S}\,,\mu)$ ein $\sigma$-endlicher Wahrscheinlichkeitsraum und $f\in\mathcal{M}^+(\Omega\,,\mathfrak{S})$, so gilt

$$\int f\,d\mu = \int_{[0\,,\infty)} \mu\,(\,[\,f\ge t\,]\,)\ \lambda(dt)\,.$$

Lösung:

$$\begin{aligned}
&\int_{[0\,,\infty)} \mu\,(\,[\,f\ge t\,]\,)\ \lambda(dt) = \int_{[0\,,\infty)} \left[\int \mathbb{1}_{[\,f\ge t\,]}(\omega)\,\mu(d\omega)\right]\ \lambda(dt)\\
&\quad= \int \left[\int_{[0\,,\infty)} \mathbb{1}_{[\,f\ge t\,]}(\omega)\,\lambda(dt)\right]\mu(d\omega) = \int \left[\int_{[0\,,f(\omega)]} 1\,\lambda(dt)\right]\mu(d\omega)\\
&\quad= \int f(\omega)\mu(d\omega)\,.
\end{aligned}$$

7. Man zeige, dass für die Kugeln $V_k(r) := \left\{(x_1,\ldots,x_k) : \sum\limits_{i=1}^{k} x_i^2 \leq r^2\right\}$ die Rekursion $\lambda_k(V_k(1)) = \frac{2\pi}{k}\,\lambda_{k-2}(V_{k-2}(1)\,)\,, k > 2$ gilt, aus der folgt

$$\lambda_{2k}(V_{2k}(1)) = \frac{(2\,\pi)^k}{\prod\limits_{i=1}^{k}(2\,i)}\,, \quad \lambda_{2k-1}(V_{2k-1}(1)) = \frac{2\,(2\,\pi)^{k-1}}{\prod\limits_{i=1}^{k}(2\,i-1)}\,. \tag{1}$$

*Hinweis:* Man berechne $\lambda_k(V_k(1))$ als Integral über die Volumina der Schnitte $V_k(1)_{(x_1,x_2)}$ und beachte, dass $V_k(r)$ durch eine lineare Transformation aus $V_k(1)$ hervorgeht.

*Lösung:* Aus $V_k(1)_{(x_1,x_2)} = \left\{(x_3,\ldots,x_k) : \sum\limits_{i=3}^{k} x_i^2 \leq 1 - x_1^2 - x_2^2\right\}$ für $x_1^2 + x_2^2 \leq 1$ und $\lambda_k(V_k(r)) = r^k\,\lambda_k(V_k(1))$ folgt

$$\begin{aligned}
\lambda_k(V_k(1)) &= \int\limits_{[x_1^2+x_2^2\leq 1]} \lambda_{k-2}(V_{k-2}(1-x_1^2-x_2^2)\,)\,\lambda_2(dx_1,dx_2) \\
&= \int\limits_{[x_1^2+x_2^2\leq 1]} (1-x_1^2-x_2^2)^{\frac{k-2}{2}}\,\lambda_{k-2}(V_{k-2}(1)\,)\,\lambda_2(dx_1,dx_2) \\
&= \lambda_{k-2}(V_{k-2}(1)\,) \int\limits_{[x_1^2+x_2^2\leq 1]} (1-x_1^2-x_2^2)^{\frac{k-2}{2}}\,\lambda_2(dx_1,dx_2)\,. \qquad (2)
\end{aligned}$$

$G : \mathbb{R}\times[0,2\,\pi) \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $(x_1,x_2) := G(r,\varphi) := (r\,\cos\varphi, r\,\sin\varphi)$ induziert für $\nu(A) := \int_A r\,\lambda_2(dr,d\varphi)$ das Maß $\nu G^{-1} = \lambda_2$ . Daher gilt

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{[x_1^2+x_2^2\leq 1]} (1-x_1^2-x_2^2)^{\frac{k-2}{2}}\,d\lambda_2 = \int\limits_{[x_1^2+x_2^2\leq 1]} (1-x_1^2-x_2^2)^{\frac{k-2}{2}}\,d\nu G^{-1} \\
&= \int\limits_{[0,1]\times[0,2\pi)} (1-r^2)^{\frac{k-2}{2}}\,\nu(dr,d\varphi) = 2\,\pi \int\limits_{[0,1]} (1-r^2)^{\frac{k-2}{2}}\,r\,\lambda(dr)\,.
\end{aligned}$$

Die Substitution $z = 1 - r^2\,, dz = -r\,dr$ liefert schließlich

$$2\,\pi \int\limits_{[0,1]} (1-r^2)^{\frac{k-2}{2}}\,r\,dr = 2\,\pi \int\limits_0^1 \frac{z^{\frac{k-2}{2}}}{2}\,dz = \pi\,\frac{2}{k}\,z^{\frac{k}{2}}\big|_0^1 = \frac{2\,\pi}{k}\,.$$

Eingesetzt in (2) ergibt das die Rekursion. Mit $V_1(1)) = 2\,, V_2(1)) = \pi$ folgt (1) daraus durch Induktion.