4. Übung aus Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie
WS 2015

1. Man zeige, dass das Null-Eins-Gesetz von Hewitt-Savage i.A. nicht gilt, wenn die Zufallsvariablen zwar unabhängig aber nicht identisch verteilt sind.

2. Für eine Folge (X_n) unabhängig, identisch verteilter Zufallsvariabler beweise man, dass mit $S_n := \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ gilt $P\left(\limsup\limits_n [S_n = 0]\right) \in \{0, 1\}$ und $\limsup\limits_n S_n = c$ P-fs. mit $c \in \overline{\mathbb{R}}$.

3. X_1, X_2, X_3 seien unabhängig und identisch verteilt nach $U_{0,1}$. Man bestimme die Verteilung von $X_1 + X_2 + X_3$.

4. $X_1, \ldots, X_n$ seien n unabhängige nach Ex_τ verteilte Zufallsvariable.
   (a) Man bestimme die Dichte von $S_n := X_1 + \ldots + X_n$.
   (b) Man berechne $P(S_n > t)$.
   (c) Eine Maschine enthält einen Verschleißteil, dessen Lebensdauer Ex_τ verteilt ist. Der Teil wird bei einem Ausfall sofort ersetzt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dass der Teil in der Zeitspanne t genau n-mal ersetzt werden muss?

   Hinweis: Suchen Sie eine Rekursionsformel für $P(S_n > t)$, und beachten Sie, dass gilt $[S_{n+1} > t] = [N_t \leq n]$, wenn N_t die Anzahl der Ausfälle im Zeitintervall $[0, t]$ ist.

5. Man zeige, dass für unabhängige Zufallsvariable X, Y mit den Verteilungsfunktionen F, G aus $F(x - \varepsilon) < F(x + \varepsilon) \wedge G(y - \varepsilon) < G(y + \varepsilon)$ für alle $\varepsilon > 0$ für die Verteilungsfunktion H ihrer Summe $X + Y$ folgt
$$H(x + y - \varepsilon) < H(x + y + \varepsilon) \quad \forall\, \varepsilon > 0\,. \tag{1}$$
   Weiters zeige man
$$F_-(x) < F(x) \wedge G_-(y) < G(y) \;\Rightarrow\; H_-(x + y) < H(x + y)\,. \tag{2}$$

6. Man zeige, dass für unabhängige Zufallsvariable $X\,, Y$ mit den Verteilungsfunktionen $F\,, G$ die Summe $S := X + Y$ eine stetige Verteilungsfunktion H besitzt, wenn F oder G stetig ist, und dass aus $PX^{-1} \ll \lambda$ oder $PY^{-1} \ll \lambda$ folgt $PS^{-1} \ll \lambda$.

7. Man bestimme die Faltungsdichte von zwei unabhängigen Cauchy-verteilten Zufallsvariablen $X_1\,,X_2$. Damit berechne man die Verteilung von $\overline{X}_{2^n} := \frac{1}{2^n}\sum\limits_{i=1}^{2^n} X_i$, wenn die X_i unabhängig, Cauchy-verteilt sind.
   Hinweis: $\frac{1}{1+(s-t)^2}\,\frac{1}{1+t^2} = \frac{1}{s^4+4\,s^2}\left[\frac{s^2}{1+(s-t)^2} + \frac{2\,s\,(s-t)}{1+(s-t)^2} + \frac{s^2}{1+t^2} + \frac{2\,s\,t}{1+t^2}\right]$,
   und integrieren Sie zunächst über $[-x\,,x]$ mit $x \to \infty$.