4. Übung aus Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie
WS 2015

1. Man zeige, dass das Null-Eins-Gesetz von Hewitt-Savage i.A. nicht gilt, wenn die Zufallsvariablen zwar unabhängig aber nicht identisch verteilt sind.

   Gegenbeispiel: Sind $X_1 \sim B_{2,\frac{1}{2}}, X_n \sim B_{\frac{1}{2}} \quad \forall\, n \geq 2$ unabhängig, dann ist $A := [\, X_n \in \{0,1\} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}]$ symmetrisch, aber es gilt

   $$P(A) = P(X_1 \leq 1) = \frac{3}{4}.$$

2. Für eine Folge (X_n) unabhängig, identisch verteilter Zufallsvariabler beweise man, dass mit $S_n := \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ gilt $P\left(\limsup\limits_n [S_n = 0]\right) \in \{0,1\}$ und $\limsup\limits_n S_n = c$ P-fs. mit $c \in \overline{\mathbb{R}}$.

   Lösung: $\limsup\limits_n [S_n = 0]$ ist offensichtlich symmetrisch, sodass aus dem 0-1-Gesetz von Hewitt-Savage $P\left(\limsup\limits_n [S_n = 0]\right) \in \{0,1\}$ folgt.

   $\limsup\limits_n S_n$ ist symmetrisch, also messbar bezüglich der σ-Algebra der symmetrischen Ereignisse, und diese ist trivial.

3. X_1, X_2, X_3 seien unabhängig und identisch verteilt nach $U_{0,1}$. Man bestimme die Verteilung von $X_1 + X_2 + X_3$.

   Lösung: Aus $f_{X_2+X_3}(t) = t\, 1_{[0,1]} + (2-t)\, 1_{(1,2]}$ und $f_{X_1}(x) = 1_{[0,1]}$ folgt $f_{X_1}(z-t)\, f_{X_2+X_3}(t) \neq 0$ für $0 \leq t \leq 2$ und $z - 1 \leq t \leq z$. Somit gilt $h(z) := f_{X_1} * f_{X_2} * f_{X_3}(z) = \int_{0 \vee (z-1)}^{2 \wedge z} f_{X_1}(z-t)\, f_{X_2+X_3}(t)\, dt$.
   Für $0 \leq z \leq 1$ gilt daher $h(z) = \int_0^z t\, dt = \frac{z^2}{2}$.
   Für $1 < z < 2$ gilt

   $$h(z) = \int_{z-1}^{1} t\, dt + \int_1^z (2-t)\, dt = \left.\frac{t^2}{2}\right|_{z-1}^{1} + \left.\left(2t - \frac{t^2}{2}\right)\right|_1^z = 3\,z - z^2 - \frac{3}{2}.$$

   Für $2 < z \leq 3$ gilt

   $$h(z) = \int_{z-1}^{2} (2-t)\, dt = \left.\left(2\,t - \frac{t^2}{2}\right)\right|_{z-1}^{2} = \frac{z^2 - 6\,z + 9}{2}.$$

4. $X_1, \ldots, X_n$ seien n unabhängige nach Ex_τ verteilte Zufallsvariable.

   (a) Man bestimme die Dichte von $S_n := X_1 + \ldots + X_n$.

(b) Man berechne $P(S_n > t)$.

(c) Eine Maschine enthält einen Verschleißteil, dessen Lebensdauer Ex_τ verteilt ist. Der Teil wird bei einem Ausfall sofort ersetzt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dass der Teil in der Zeitspanne t genau n-mal ersetzt werden muss?

Hinweis: Suchen Sie eine Rekursionsformel für $P(S_n > t)$, und beachten Sie, dass gilt $[S_{n+1} > t] = [N_t \leq n]$, wenn N_t die Anzahl der Ausfälle im Zeitintervall $[0, t]$ ist.

Lösung:

(a) $S_n \sim Er_{n,\tau}$ ($Er_{n,\tau} = \Gamma(n, \frac{1}{\tau})$.)
Für $X \sim Ex_\tau$ und $Y \sim Er_{n-1,\tau}$ gilt

$$\begin{aligned} f_{X+Y}(z) &= \int\limits_0^z \tau\, \mathrm{e}^{-\tau(z-y)}\, \frac{\tau^{n-1}\, y^{n-2}}{(n-2)!}\, \mathrm{e}^{-\tau\, y}\, dy \\ &= \frac{\tau^n\, \mathrm{e}^{-\tau\, z}}{(n-2)!} \int\limits_0^z y^{n-2}\, dy = \frac{\tau^n\, z^{n-1}}{(n-1)!}\, \mathrm{e}^{-\tau\, z}, \text{ d.h. } X+Y \sim Er_{n,\tau}. \end{aligned}$$

(b) Mit $H_n(x) := P(S_n > x) = \int_x^\infty \frac{\tau^n\, t^{n-1}}{(n-1)!}\, \mathrm{e}^{-\tau\, t}\, dt$ gilt

$$\begin{aligned} H_{n+1}(x) &= \int\limits_x^\infty \frac{\tau^{n+1}\, t^n}{n!}\, \mathrm{e}^{-\tau\, t}\, dt \\ &= -\frac{\tau^{n+1}\, t^n\, \mathrm{e}^{-\tau\, t}}{n!\, \tau}\Bigg|_x^\infty + \int\limits_x^\infty \frac{\tau^{n+1}\, n\, t^{n-1}}{n!\, \tau}\, \mathrm{e}^{-\tau\, t}\, dt \\ &= \frac{\tau^n\, x^n}{n!}\, \mathrm{e}^{-\tau\, x} + \int\limits_x^\infty \frac{\tau^n\, t^{n-1}}{(n-1)!}\, \mathrm{e}^{-\tau\, t}\, dt = \frac{\tau^n\, x^n}{n!}\, \mathrm{e}^{-\tau\, x} + H_n(x). \end{aligned}$$

Daher gilt $H_n(x) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \frac{(\tau\, x)^i}{i!}\, \mathrm{e}^{-\tau\, x}$.

(c) Wegen $P(N_t \leq n) = P(S_{n+1} > t)$ gilt

$$\begin{aligned} P(N_t = n) &= P(S_{n+1} > t) - P(S_n > t) \\ &= H_{n+1}(t) - H_n(t)) = \frac{(\tau\, t)^n}{n!}\, \mathrm{e}^{-\tau\, t} \text{ d.h. } N_t \sim P_{t\,\tau}. \end{aligned}$$

5. Man zeige, dass für unabhängige Zufallsvariable X, Y mit den Verteilungsfunktionen F, G aus $F(x-\varepsilon) < F(x+\varepsilon) \wedge G(y-\varepsilon) < G(y+\varepsilon)$ für alle $\varepsilon > 0$ für die Verteilungsfunktion H ihrer Summe $X+Y$ folgt

$$H(x+y-\varepsilon) < H(x+y+\varepsilon) \quad \forall\, \varepsilon > 0\,. \tag{1}$$

Weiters zeige man

$$F_-(x) < F(x) \wedge G_-(y) < G(y) \;\Rightarrow\; H_-(x+y) < H(x+y)\,. \qquad (2)$$

Beweis: Aus $\left[|X-x| \le \frac{\varepsilon}{2}\right] \cap \left[|Y-y| \le \frac{\varepsilon}{2}\right] \subseteq [|X+Y-x-y| \le \varepsilon]$ folgt

$$\begin{aligned} &P(|X+Y-x-y| \le \varepsilon) \ge H(x+y+\varepsilon) - H(x+y-\varepsilon) \\ &\quad \ge \left(F\left(x+\frac{\varepsilon}{2}\right) - F\left(x-\frac{\varepsilon}{2}\right)\right)\left(G\left(y+\frac{\varepsilon}{2}\right) - G\left(y-\frac{\varepsilon}{2}\right)\right) > 0\,. \end{aligned}$$

Aus $[X+Y=x+y] \supseteq [X=x] \cap [Y=y]$ folgt

$$H(x+y) - H_-(x+y) \ge [F(x) - F_-(x)]\,[G(y) - G_-(y)] > 0\,.$$

6. Man zeige, dass für unabhängige Zufallsvariable $X\,,Y$ mit den Verteilungsfunktionen $F\,,G$ die Summe $S := X+Y$ eine stetige Verteilungsfunktion H besitzt, wenn F oder G stetig ist, und dass aus $PX^{-1} \ll \lambda$ oder $PY^{-1} \ll \lambda$ folgt $PS^{-1} \ll \lambda$.

   Beweis: Sei F stetig, dann gilt $PX^{-1}(\{x\}) = 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$. Daraus folgt

   $$\begin{aligned} &H(x) - H_-(x) = PS^{-1}(\{x\}) = PX^{-1} * PY^{-1}(\{x\}) \\ &\quad = \int PX^{-1}(\{x\} - y)\, PY^{-1}(dy) = \int PX^{-1}(\{x-y\})\, PY^{-1}(dy) = 0\,. \end{aligned}$$

   Ist $PX^{-1} \ll \lambda$ und $\lambda(A) = 0$, so gilt wegen der Translationsinvarianz von $\lambda \quad \lambda(A-y) = 0 \quad \forall\, y \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; PX^{-1}(A-y) = 0 \;\forall\, y \in \mathbb{R}$. Somit gilt $PS^{-1}(A) = \int PX^{-1}(A-y)\, PY^{-1}(dy) = 0$.

7. Man bestimme die Faltungsdichte von zwei unabhängigen Cauchy-verteilten Zufallsvariablen $X_1\,, X_2$. Damit berechne man die Verteilung von $\overline{X}_{2^n} := \frac{1}{2^n} \sum\limits_{i=1}^{2^n} X_i$, wenn die X_i unabhängig, Cauchy-verteilt sind.

   Hinweis: $\frac{1}{1+(s-t)^2}\,\frac{1}{1+t^2} = \frac{1}{s^4+4\,s^2}\left[\frac{s^2}{1+(s-t)^2} + \frac{2\,s\,(s-t)}{1+(s-t)^2} + \frac{s^2}{1+t^2} + \frac{2\,s\,t}{1+t^2}\right]$, und integrieren Sie zunächst über $[-x\,,x]$ mit $x \to \infty$.

   Lösung: Die Richtigkeit der obigen Beziehung folgt aus

   $$\begin{aligned} &\frac{3\,s^2 - 2\,s\,t}{1+(s-t)^2} + \frac{s^2 + 2\,s\,t}{1+t^2} \\ &\quad = \frac{3\,s^2 - 2\,s\,t + 3\,s^2\,t^2 - 2\,s\,t^3 + s^2 + 2\,s\,t + (s^2 + 2\,s\,t)\,(s-t)^2}{(1+(s-t)^2)\,(1+t^2)} \\ &\quad = \frac{4\,s^2 + 3\,s^2\,t^2 - 2\,s\,t^3 + s^2\,(s^2 - 2\,s\,t + t^2) + 2\,s\,t\,(s^2 - 2\,s\,t + t^2)}{(1+(s-t)^2)\,(1+t^2)} \\ &\quad = \frac{4\,s^2 + 3\,s^2\,t^2 - 2\,s\,t^3 + s^4 - 2\,s^3\,t + s^2\,t^2 + 2\,s^3\,t - 4\,s^2\,t^2 + 2\,s\,t^3}{(1+(s-t)^2)\,(1+t^2)} \\ &\quad = \frac{s^4 + 4\,s^2}{(1+(s-t)^2)\,(1+t^2)} \qquad (3) \end{aligned}$$

Aus (3) folgt

$$
\begin{aligned}
&(s^4 + 4\,s^2) \int\limits_{-x}^{x} \frac{1}{(1+(s-t)^2)\,(1+t^2)}\,dt \\
&\quad = \int\limits_{-x}^{x} \frac{s^2}{1+(s-t)^2}\,dt + \int\limits_{-x}^{x} \frac{2\,s\,(s-t)}{1+(s-t)^2}\,dt + \int\limits_{-x}^{x} \frac{s^2}{1+t^2}\,dt + \int\limits_{-x}^{x} \frac{2\,s\,t}{1+t^2}\,dt \quad (4)
\end{aligned}
$$

Da $\frac{t}{1+t^2}$ symmetrisch um 0 ist, gilt

$$
\int\limits_{-x}^{x} \frac{2\,s\,t}{1+t^2}\,dt = 0\,.
$$

$z := s - t$ führt mit $m := |x-s| \wedge |x+s|\,,\ M := |x-s| \vee |x+s|$ zu

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{-x}^{x} \frac{2\,s\,(s-t)}{1+(s-t)^2}\,dt &= \int\limits_{s-x}^{x+s} \frac{2\,s\,z}{1+z^2}\,dz = \int\limits_{-m}^{m} \frac{2\,s\,z}{1+z^2}\,dz + \int\limits_{m}^{M} \frac{2\,s\,z}{1+z^2}\,dz \\
&= \int\limits_{-m}^{M} \frac{2\,s\,z}{1+z^2}\,dz = s\left[\log(1+M^2) - \log(1+m^2)\right] = s\,\log\left(\frac{1+M^2}{1+m^2}\right).
\end{aligned}
$$

Das konvergiert gegen 0, da gilt $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1+(|x-s|\vee|x+s|)^2}{1+(|x-s|\wedge|x+s|)^2} = 1\,.$

$$
\int\limits_{-x}^{x} \frac{s^2}{1+t^2}\,dt = s^2\,\arctan t|_{-x}^{x} \to \pi\,s^2.
$$

Mit $z := s - t$ gilt

$$
\int\limits_{-x}^{x} \frac{s^2}{1+(s-t)^2}\,dt = \int\limits_{s-x}^{x+s} \frac{s^2}{1+z^2}\,dz = s^2\,\arctan t|_{s-x}^{x+s} \ \to\ \pi\,s^2\,.
$$

Aus (4) und den obigen Gleichungen folgt

$$
f_{X_1} * f_{X_2}(s) = \int \frac{1}{\pi^2\,(1+(s-t)^2)\,(1+t^2)}\,dt = \frac{2\,\pi\,s^2}{\pi^2\,(s^4+4\,s^2)} = \frac{2}{\pi\,(s^2+4)}\,.
$$

Aus dem Transformationssatz folgt nun mit $z = \frac{s}{2}$

$$
f_{\frac{X_1+X_2}{2}}(z) = \frac{4}{\pi\,(4\,z^2+4)} = \frac{1}{\pi\,(z^2+1)}\,,
$$

d.h. $\frac{X_1+X_2}{2}$ ist Cauchy-verteilt. Damit folgt durch vollständige Induktion, dass auch $\overline{X}_{2^n}$ Cauchy-verteilt ist.