5. Übung aus Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie
WS 2015

1. Man zeige, dass durch $\zeta(A) := \begin{cases} |A|\,, & \text{für}|A| < \infty \\ -|A^c|\,, & \text{für}|A^c| < \infty \end{cases}$ auf der Algebra $\mathfrak{A} := \{A \subseteq \mathbb{R} : |A| < \infty \ \vee \ |A^c| < \infty\}$ eine σ-additive Mengenfunktion mit $\zeta(\emptyset) = \zeta(\mathbb{R}) = 0$ definiert wird, die aber nicht zu einem signierten Maß auf die von $\mathfrak{A}$ erzeugte σ-Algebra fortgesetzt werden kann.

2. Man beweise, dass auf jedem signierten Maßraum $(\Omega, \mathfrak{S}, \nu)$ gilt

$$|\nu|(A) = \sup\left\{ \sum_{i=1}^{n} |\nu(A_i)| : \bigcup_{i=1}^{n} A_i \subseteq A \ \wedge \ A_i \cap A_j = \emptyset\,, \forall\, i \neq j \right\}.$$

   Außerdem zeige man, dass für 2 signierte Maße μ und ν, deren Summe $\mu+\nu$ auch ein signiertes Maß ist (d.h. μ und ν nehmen entweder beide nicht den Wert $-\infty$ an oder beide nehmen ∞ nicht an), gilt

$$|\mu + \nu| \leq |\mu| + |\nu|\,.$$

3. Ist μ auf einem Ring $\mathfrak{R}$ additiv mit $\mu(\emptyset) = 0$ und nach unten beschränkt, d.h. es gibt ein $K \in \mathbb{R}^+$, sodass $\mu(A) \geq -K \quad \forall\, A \in \mathfrak{R}$, dann gibt es 2 Inhalte μ^+ und μ^- auf $\mathfrak{R}$ mit $\mu = \mu^+ - \mu^-$.

4. Gibt es auf $([0,1], \mathfrak{B} \cap [0,1])$ eine *Lebesgue-Zerlegung* von ν bez. μ für

   (a) $\nu := \lambda\,, \mu(B) := \zeta(B) := |B| \quad \forall\, B \in \mathfrak{B} \cap [0,1]\,,$

   (b) $\nu := \zeta\,, \mu := \lambda\,,$

   (c) $\nu(B) := |B \cap A|\,, \mu(B) := |B \cap A^c|\,,\ A \in \mathfrak{B} \cap [0,1]\,,$

   (d) $\nu(B) := |B \cap A|\,, \mu(B) := |B \cap A^c|\,,\ A \notin \mathfrak{B} \cap [0,1]\,.$

5. Man zeige, dass auf einem σ-endlichen Maßraum $(\Omega\,, \mathfrak{S}\,, \mu)$ jedes σ-endliche, signierte Maß ν genau dann singulär zu μ ist, wenn kein signiertes Maß $\rho \neq 0$ existiert mit $|\rho| \leq |\nu| \ \wedge \ \rho \ll \mu$.

6. Ist $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ ein endlicher Maßraum mit $\mu(\Omega) > 0\,, \nu$ ein weiteres endliches Maß auf dem Raum mit der Lebesgue-Zerlegung $\nu_c \ll \mu\,, \nu_s \perp \mu\,,$ $\mathfrak{A}$ eine Teilsigmaalgebra von $\mathfrak{S}$ und $\widetilde{\nu} := \nu|_{\mathfrak{A}}$ die Restriktion von ν auf $\mathfrak{A}$ mit der Lebesgue-Zerlegung $\widetilde{\nu}_c \ll \mu|_{\mathfrak{A}}\,, \widetilde{\nu}_s \perp \mu|_{\mathfrak{A}}$, so gilt

$$\widetilde{\nu}_c(A) \geq \nu_c(A) \ \wedge \ \widetilde{\nu}_s(A) \leq \nu_s(A) \quad \forall\, A \in \mathfrak{A}\,.$$

   Für $\mathfrak{A} := \{\emptyset, \Omega\}$ gilt $\widetilde{\nu} = \widetilde{\nu}_c$ und $\widetilde{\nu}_s \equiv 0$.

7. Man zeige, dass es zu zwei endlichen, zueinander nicht singulären Maßen $\mu\,, \nu$ auf einem Messraum $(\Omega\,\mathfrak{S})$ stets ein $A \in \mathfrak{S}$ und ein $\varepsilon > 0$ gibt, sodass $\mu(A) > 0$ und $\varepsilon\, \mu(B) \leq \nu(B) \quad \forall\, B \subseteq A$.