5. Übung aus Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie WS 2015

1. Man zeige, dass durch $\zeta(A) := \begin{cases} |A|\,, & \text{für} |A| < \infty \\ -|A^c|\,, & \text{für} |A^c| < \infty \end{cases}$ auf der Algebra $\mathfrak{A} := \{A \subseteq \mathbb{R} : |A| < \infty \ \vee \ |A^c| < \infty\}$ eine σ-additive Mengenfunktion mit $\zeta(\emptyset) = \zeta(\mathbb{R}) = 0$ definiert wird, die aber nicht zu einem signierten Maß auf die von $\mathfrak{A}$ erzeugte σ-Algebra fortgesetzt werden kann.

   Lösung: Sind (A_n) disjunkte Mengen aus $\mathfrak{A}$ mit $A := \bigcup\limits_n A_n \in \mathfrak{A}$ und gilt $|A| < \infty$, so muss es ein m geben, sodass $A_n = \emptyset \quad \forall\, n > m$. Dann gilt $\zeta\left(\bigcup\limits_n A_n\right) = \zeta\left(\bigcup\limits_{n=1}^m A_n\right) = \sum\limits_{n=1}^m \zeta(A_n) = \sum\limits_{n=1}^\infty \zeta(A_n)$.
   Gilt $|A| = \infty$, so muss es ein m geben, sodass $|A_m^c| < \infty$, denn aus $|A_n| < \infty \quad \forall\, n$ würde folgen $|A| \leq \aleph_0 \ \Rightarrow \ |A^c| > \aleph_0 \geq \infty$, Somit würde gelten $|A| = |A^c| = \infty \ \Rightarrow \ A \notin \mathfrak{A}$.
   Aus $A_n \cap A_m = \emptyset \quad \forall\, n \neq m$ folgt $A_n \subseteq A_m^c \ \Rightarrow \ \bigcup\limits_{n \neq m} A_n \subseteq A_m^c$. Daher gilt $A^c = \bigcap\limits_n A_n^c = A_m^c \setminus \bigcup\limits_{n\neq m} A_n$, und wegen $\left|\bigcup\limits_{n\neq m} A_n\right| < \infty$ existiert ein k, sodass $A_n = \emptyset \quad \forall\, n > k$. Daraus folgt

$$|A^c| = |A_m^c| - \sum_{\substack{n \leq k, \\ n \neq m}} |A_n| \Rightarrow \zeta(A) = \sum_{\substack{n \leq k, \\ n \neq m}} \zeta(A_n) + \zeta(A_m) = \sum_n \zeta(A_n).$$

   $\zeta(\emptyset) = 0 \ \wedge \ \zeta(\mathbb{R}) = -|\mathbb{R}^c| = -|\emptyset| = 0$.
   $\mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{A}) = \mathfrak{S} := \{A \subseteq \mathbb{R} : |A| \leq \aleph_0 \ \vee \ |A^c| \leq \aleph_0\}$ ist klar. Wäre ζ auf $\mathfrak{S}$ fortsetzbar, müsste gelten $\zeta(\mathbb{N}) = \sum\limits_n \zeta(\{n\}) = \sum\limits_n 1 = \infty$. Aber wegen $0 = \zeta(\mathbb{R}) = \zeta(\mathbb{N}) + \zeta(\mathbb{N}^c)$ kann $\zeta(\mathbb{N}^c)$ nicht endlich sein, und für $\zeta(\mathbb{N}^c) = -\infty$ ist ζ kein signiertes Maß.

2. Man beweise, dass auf jedem signierten Maßraum $(\Omega, \mathfrak{S}, \nu)$ gilt

$$|\nu|(A) = \sup\left\{ \sum_{i=1}^n |\nu(A_i)| : \bigcup_{i=1}^n A_i \subseteq A \ \wedge \ A_i \cap A_j = \emptyset\,, \forall\, i \neq j \right\}.$$

   Außerdem zeige man, dass für 2 signierte Maße μ und ν, deren Summe $\mu+\nu$ auch ein signiertes Maß ist (d.h. μ und ν nehmen entweder beide nicht den Wert $-\infty$ an oder beide nehmen ∞ nicht an), gilt

$$|\mu + \nu| \leq |\mu| + |\nu|.$$

Beweis: Ist (P,N) eine Hahn-Zerlegung von Ω bezüglich ν,so gilt mit $A_1 := A \cap P$ und $A_2 := A \cap\ N$

$$\begin{aligned}
|\nu|(A) &= \nu(A\cap P) - \nu(A\cap N) = |\nu(A_1)| + |\nu(A_2)| \\
\le\ \ & S := \sup\left\{ \sum_{i=1}^{n} |\nu(A_i)| :\ \bigcup_{i=1}^{n} A_i \subseteq A\ \wedge\ A_{\cap} A_j = \emptyset\,, \forall\, i\neq j \right\}.
\end{aligned}$$

Aber für alle $A_1,\ldots,A_n$ mit $A_i \cap A_j = \emptyset\,, \forall\, i \neq j$ und $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i \subseteq A$ gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} |\nu(A_i)| &= \sum_{i=1}^{n} |\nu^+(A_i) - \nu^-(A_i)| \le \sum_{i=1}^{n} |\nu^+(A_i)| + |\nu^-(A_i)| \\
&= |\nu|\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \le |\nu|(A)\,,\ \Rightarrow S \le |\nu|(A)\,.
\end{aligned}$$

Sind $(P_\mu,N_\mu),(P_\nu,N_\nu),(P_s,N_s)$ die Hahn-Zerlegungen zu $\mu\,,\nu$ und $\mu+\nu$, so folgt aus der obigen Argumentation

$$\begin{aligned}
|\mu+\nu|(A) &= (\mu+\nu)(A\cap P_s) - (\mu+\nu)(A\cap N_s) \\
&= \mu(A\cap P_s) - \mu(A\cap N_s) + \nu(A\cap P_s) - \nu(A\cap N_s) \\
&\le \mu(A\cap P_\mu) - \mu(A\cap N_\mu) + \nu(A\cap P_\nu) - \nu(A\cap N_\nu).
\end{aligned}$$

3. Ist μ auf einem Ring $\mathfrak{R}$ additiv mit $\mu(\emptyset) = 0$ und nach unten beschränkt, d.h. es gibt ein $K \in \mathbb{R}^+$, sodass $\mu(A) \ge -K \quad \forall\ A \in \mathfrak{R}$, dann gibt es 2 Inhalte μ^+ und μ^- auf $\mathfrak{R}$ mit $\mu = \mu^+ - \mu^-$.

   Lösung: Aus $\emptyset \subseteq A$ folgt $\mu^+(A) := \sup\{\mu(B) : B \subseteq A\,,\ B \in \mathfrak{R}\} \ge 0$ $\forall\ A$ mit $\mu^+(\emptyset) = 0$ und $\mu^-(A) := -\inf\{\mu(B) : B \subseteq A\,,\ B \in \mathfrak{R}\} \ge 0$ mit $\mu^-(\emptyset) = 0$.
   Aus $A \subseteq B$ folgt natürlich $\mu^+(A) \le \mu^+(B)$ und $\mu^-(A) \le \mu^-(B)$.
   Sind nun $A_1\,, A_2$ aus $\mathfrak{R}$ disjunkt, so gilt

$$\begin{aligned}
\mu^+(A_1\cup A_2) &= \sup\{\mu(B) : B \subseteq A_1\cup A_2\,,\ B\in\mathfrak{R}\} \\
&= \sup\{\mu(B\cap A_1) + \mu(B\cap A_2) : B \subseteq A_1\cup A_2\,,\ B\in\mathfrak{R}\} \\
&\le \sup\{\mu(B) : B\subseteq A_1\,,\ B\in\mathfrak{R}\} + \sup\{\mu(B) : B\subseteq A_2\,,\ B\in\mathfrak{R}\} \\
&= \mu^+(A_1) + \mu^+(A_2)\,.
\end{aligned}$$

   Gilt $\mu^+(A_1\cup A_2) = \infty$, so folgt daraus $\mu^+(A_1)+\mu^+(A_2) = \infty$, d.h. in diesem Fall gilt $\mu^+(A_1\cup A_2) = \mu^+(A_1) + \mu^+(A_2)$.
   Gilt $\mu^+(A_1\cup A_2) < \infty$, so gilt wegen der Monotonie auch $\mu^+(A_1) < \infty$ und $\mu^+(A_2) < \infty$. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es $B_i \subseteq A_i,\ B_i \in \mathfrak{R}$ mit $\mu^+(A_i) - \varepsilon < \mu(B_i) \le \mu^+(A_i),\ i = 1,2$. Wegen $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ gilt

$$\mu^+(A_1) + \mu^+(A_2) - 2\varepsilon \le \mu(B_1) + \mu(B_2) = \mu(B_1\cup B_2) \le \mu^+(A_1\cup A_2).$$

Die Additivität von μ^- zeigt man analog.

Aus $\mu(A) = \infty$ folgt wegen $A \subseteq A \in \mathfrak{R}$ auch $\mu^+(A) = \infty$, und da voraussetzungsgemäß $0 \leq \mu^-(A) \leq K < \infty$, folgt daraus sofort $\mu(A) = \mu^+(A) - \mu^-(A) = \infty$.

Gilt $\mu(A) < \infty$, so gilt für jedes $B \subseteq A,\ B \in \mathfrak{R}$ auch $\mu(B) \in \mathbb{R}$ und $\mu(A \setminus B) \in \mathbb{R}$, da $\mu(A) = \mu(B) + \mu(A \setminus B)$. Daraus folgt

$$\begin{aligned}\mu(B) = \mu(A) - \mu(A \setminus B) \leq \mu(A) + K \quad \forall\, B \subseteq A,\ B \in \mathfrak{R} \\ \Rightarrow\ \mu^+(A) \leq |\mu(A)| + K < \infty. \\ -\mu^-(A) = \inf\{\mu(A \setminus B) : B \subseteq A,\ B \in \mathfrak{R}\} \\ = \inf\{\mu(A) - \mu(B) : B \subseteq A,\ B \in \mathfrak{R}\} \\ = \mu(A) + \inf\{-\mu(B) : B \subseteq A,\ B \in \mathfrak{R}\} \\ = \mu(A) - \sup\{\mu(B) : B \subseteq A,\ B \in \mathfrak{R}\} \\ = \mu(A) - \mu^+(A)\ \Rightarrow \mu(A) = \mu^+(A) - \mu^-(A)\,.\end{aligned}$$

4. Gibt es auf $([0,1], \mathfrak{B} \cap [0,1])$ eine *Lebesgue-Zerlegung* von ν bez. μ für

   (a) $\nu := \lambda\,, \mu(B) := \zeta(B) := |B| \quad \forall\, B \in \mathfrak{B} \cap [0,1]\,,$
   (b) $\nu := \zeta\,, \mu := \lambda\,,$
   (c) $\nu(B) := |B \cap A|\,, \mu(B) := |B \cap A^c|\,,\ A \in \mathfrak{B} \cap [0,1]\,,$
   (d) $\nu(B) := |B \cap A|\,, \mu(B) := |B \cap A^c|\,,\ A \notin \mathfrak{B} \cap [0,1]\,.$

   Lösung:

   (a) $\zeta(B) = 0\ \Rightarrow\ B = \emptyset\ \Rightarrow\ \lambda(B) = 0\ \Rightarrow\ \nu_c = \lambda\,, \nu_s \equiv 0\,.$
   (b) Angenommen es gilt $\zeta = \zeta_c + \zeta_s\,, \zeta_c \ll \lambda\,, \zeta_s \perp \lambda$. Dann gibt es ein $C \in \mathfrak{S} := \mathfrak{B} \cap [0,1]\ :\ $ mit $\lambda(C^c) = \zeta_s(C) = 0$. Wegen $\lambda(C^c) = 0$ gilt $C \neq \emptyset$. Für $x \in C$ gilt wegen $\lambda(\{x\}) = 0$ jedoch $1 = \zeta(\{x\}) = \zeta_c(\{x\}) + \zeta_s(\{x\}) \leq 0 + \zeta_s(C) = 0\,.$
   (c) $\nu_s := \nu\,, \nu_c \equiv 0\ \Rightarrow\ \nu_s(A^c) = 0\,, \mu(A) = 0\ \Rightarrow\ \nu_s \perp \mu\,.$
   (d) Angenommen $\nu = \nu_c + \nu_s\,, \nu_c \ll \mu\,, \nu_s \perp \mu$, dann gibt es ein $C \in \mathfrak{S}:\ \nu_s(C) = 0$ und $\mu(C^c) = |C^c \cap A^c| = 0\ \Rightarrow\ C^c \cap A^c = \emptyset\ \Rightarrow\ C^c \subseteq A$. Da $C^c \in \mathfrak{S}$ und $A \notin \mathfrak{S}$ gilt $C^c \neq A\ \Rightarrow\ C \cap A \neq \emptyset$. Also gilt $\nu(C \cap A) > 0$. Aber $\nu_s(C \cap A) \leq \nu_s(C) = 0$ und aus $\mu(C \cap A) = |A \cap C \cap A^c| = 0$ folgt $\nu_c(C \cap A) = 0\ \Rightarrow\ \nu \neq \nu_c + \nu_s$. Das ist ein Widerspruch.

5. Man zeige, dass auf einem σ-endlichen Maßraum $(\Omega\,, \mathfrak{S}\,, \mu)$ jedes σ-endliche, signierte Maß ν genau dann singulär zu μ ist, wenn kein signiertes Maß $\rho \neq 0$ existiert mit $|\rho| \leq |\nu|\ \wedge\ \rho \ll \mu$.

   Beweis: $\nu \perp \mu\ \Rightarrow\ \exists\, C:\ |\nu|(C) = 0\ \wedge\ \mu(C^c) = 0$. Daraus und $\rho \ll \mu$ folgt $|\rho|(C^c) = 0$. Wegen $0 \leq |\rho|(C) \leq |\nu|(C) = 0$ gilt also $\rho \equiv 0$.

Gilt umgekehrt $\nu \not\ll \mu$, so existiert, da μ, ν σ-endlich sind, eine Lebesgue-Zerlegung $|\nu| = \rho + \tau$ von $|\nu|$ bez. μ mit $0 \neq \rho \ll \mu \wedge \tau \perp \mu$. Klarerweise gilt $\rho(A) \leq \rho(A) + \tau(A) = |\nu|(A)$.

6. Ist $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ ein endlicher Maßraum mit $\mu(\Omega) > 0$, ν ein weiteres endliches Maß auf dem Raum mit der Lebesgue-Zerlegung $\nu_c \ll \mu$, $\nu_s \perp \mu$, $\mathfrak{A}$ eine Teilsigmaalgebra von $\mathfrak{S}$ und $\widetilde{\nu} := \nu|_{\mathfrak{A}}$ die Restriktion von ν auf $\mathfrak{A}$ mit der Lebesgue-Zerlegung $\widetilde{\nu}_c \ll \mu|_{\mathfrak{A}}$, $\widetilde{\nu}_s \perp \mu|_{\mathfrak{A}}$, so gilt

$$\widetilde{\nu}_c(A) \geq \nu_c(A) \wedge \widetilde{\nu}_s(A) \leq \nu_s(A) \quad \forall A \in \mathfrak{A}.$$

   Für $\mathfrak{A} := \{\emptyset, \Omega\}$ gilt $\widetilde{\nu} = \widetilde{\nu}_c$ und $\widetilde{\nu}_s \equiv 0$.

   Lösung: Für $\mathfrak{A} := \{\emptyset, \Omega\}$ gilt $\mu(\Omega) > 0 \Rightarrow \widetilde{\nu}_s(\Omega) = 0 \Rightarrow \nu(\Omega) = \widetilde{\nu}_c(\Omega)$.

   Ist $N \in \mathfrak{A}$ mit $\mu|_{\mathfrak{A}}(N) = \mu(N) = 0 \wedge \widetilde{\nu}_s(N^c) = 0$, dann gilt $\widetilde{\nu}_c(N) = 0$.

$$\begin{aligned}\widetilde{\nu}_c(A) &= \widetilde{\nu}_c(A \cap N^c) = \widetilde{\nu}_c(A \cap N^c) + \widetilde{\nu}_s(A \cap N^c) = \widetilde{\nu}(A \cap N^c) = \nu(A \cap N^c)\\ &= \nu_c(A \cap N^c) + \nu_s(A \cap N^c) = \nu_c(A \cap N^c) + \nu_c(A \cap N) + \nu_s(A \cap N^c)\\ &= \nu_c(A) + \nu_s(A \cap N^c) \geq \nu_c(A).\end{aligned}$$

7. Man zeige, dass es zu zwei endlichen, zueinander nicht singulären Maßen μ, ν auf einem Messraum $(\Omega\, \mathfrak{S})$ stets ein $A \in \mathfrak{S}$ und ein $\varepsilon > 0$ gibt, sodass $\mu(A) > 0$ und $\varepsilon\, \mu(B) \leq \nu(B) \quad \forall B \subseteq A$.

   Beweis: Ist $P_n, N_n := P_n^c$ die Lebesgue-Zerlegung von $\nu - \frac{1}{n}\mu$, so gilt für $N := \bigcap\limits_n N_n \quad \nu(N) \leq \frac{1}{n}\mu(N) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \nu(N) = 0$.

   Da μ, ν nicht singulär sind, folgt daraus $\mu(P) > 0$ für $P := N^c = \bigcup\limits_n P_n$, und dies impliziert weiters, dass ein n existiert mit $\mu(P_n) > 0$.

   Da P_n die positive Menge der Hahn-Zerlegung von $\nu - \frac{1}{n}\mu$ ist, gilt $\frac{1}{n}\mu(B) \leq \nu(B) \quad \forall B \subseteq P_n$.