6. Übung aus Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie
WS 2015

1. Ist (f_n) eine Folge monoton wachsender Funktionen auf $[a\,,b]$, für die gilt $f(x) := \sum\limits_n f_n(x) \in \mathbb{R} \quad \forall\, x \in [a\,,b]$, so zeige man, dass
   (a) $\sum\limits_n f_n' \leq f' \quad \lambda$-fü,
   (b) für die Teilfolge der Restsummen $r_{n_k} := \sum\limits_{n>n_k} f_n$ mit $r_{n_k}(b) \leq 2^{-k}$ $\forall\, k \in \mathbb{N}$ gilt $\sum\limits_k r_{n_k}' < \infty \quad \lambda$-fü (was folgt daraus für $\lim\limits_k r_{n_k}'$?),
   (c) $\sum\limits_n f_n' = f' \quad \lambda$-fü.

2. Gegeben seien folgende Verteilungsfunktionen auf $\mathbb{R}$:
$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 0 \\ x & \text{falls } 0 \leq x < 1 \\ x+1 & \text{falls } 1 \leq x < 2 \\ 3 & \text{falls } x \geq 2 \end{cases} \qquad G(x) = \begin{cases} x & \text{falls } x < 1 \\ x^2 & \text{falls } 1 \leq x < 2 \\ 5 & \text{falls } x \geq 2 \end{cases}$$
   Bestimmen Sie die Lebesgue-Zerlegung von μ_G bezüglich μ_F sowie die Radon-Nikodym-Dichte $\frac{d\mu_G}{d\mu_F}$ des absolut stetigen Anteils.

3. Man zeige, dass auf $\mathfrak{S} := \{B \times \mathbb{R} : \; B \in \mathfrak{B}\,\}$ das Maß $\nu(B \times \mathbb{R}) := \lambda(B)$ absolut stetig bezüglich $\mu(B \times \mathbb{R}) := \lambda_2(B \times \mathbb{R})$ ist, dass es aber keine Dichte $\frac{d\nu}{d\mu}$ gibt. Widerspricht dies dem Satz von Radon-Nikodym ?

4. Sind $(\Omega_i, \mathfrak{S}_i, \mu_i) \quad i = 1,2$ zwei σ-endliche Maßräume, so zeige man, dass aus $\nu_i \ll \mu_i \quad i = 1,2$ folgt: $\nu_1 \otimes \nu_2 \ll \mu_1 \otimes \mu_2$, und dass dann gilt:
$$\frac{d\nu_1 \otimes \nu_2}{d\mu_1 \otimes \mu_2} = \frac{d\nu_1}{d\mu_1}\,\frac{d\nu_2}{d\mu_2}.$$

5. Man zeige, dass selbst dann , wenn μ endlich und $\nu \quad \sigma$-endlich ist, aus $\nu \ll \mu$ im Allgemeinen nicht folgt, dass es für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass $\mu(A) \leq \delta \;\Rightarrow\; \nu(A) \leq \varepsilon$.

6. Man zeige, dass auf einem σ-endlichen Maßraum $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ jedes Maß $\nu \leq \mu$ eine μ–fü eindeutig bestimmte Dichte $\frac{d\nu}{d\mu}$ besitzt mit $\frac{d\nu}{d\mu} \leq 1\mu$–fü.

7. Man zeige, dass auf einem Maßraum $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ für die Maße ν_n und $\nu := \sum\limits_n \nu_n$ mit den Lebesgue-Zerlegungen $\nu_c \ll \mu, \nu_{n,c} \ll \mu$, $\nu_s \perp \mu$ und $\nu_{n,s} \perp \mu$ gilt $\nu_c = \sum\limits_n \nu_{n,c} \;\wedge\; \nu_s = \sum\limits_n \nu_{n,s}$ sowie $\sum\limits_n \frac{d\nu_{n,c}}{d\mu} = \frac{d\nu_c}{d\mu}$, wenn die Maße μ und ν endliche sind.
   Damit beweise man Beispiel 1. Punkt (c) auf andere Art.