6. Übung aus Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie
WS 2015

1. Ist (f_n) eine Folge monoton wachsender Funktionen auf $[a\,,b]$, für die gilt $f(x) := \sum\limits_n f_n(x) \in \mathbb{R} \quad \forall\, x \in [a\,,b]$, so zeige man, dass

   (a) $\sum\limits_n f_n' \le f' \quad \lambda$-fü,

   (b) für die Teilfolge der Restsummen $r_{n_k} := \sum\limits_{n>n_k} f_n$ mit $r_{n_k}(b) \le 2^{-k}$ $\forall\, k \in \mathbb{N}$ gilt $\sum\limits_k r_{n_k}' < \infty \quad \lambda$-fü (was folgt daraus für $\lim\limits_k r_{n_k}'$?),

   (c) $\sum\limits_n f_n' = f' \quad \lambda$-fü.

   Lösung 1: Man kann o.E.d.A. annehmen $f_n(a) = f(a) = 0$, da man ansonsten f_n durch $g_n(x) := f_n(x) - f_n(a)$ ersetzen kann.

   ad 1a. Da die r_n auf $[a\,,b]$ monoton wachsend mit $r_n(b) \le f(b) < \infty$ sind, sind sie λ-fü differenzierbar mit $r_n' \ge 0$ λ-fü. Somit folgt aus $f = \sum\limits_{i=1}^{n} f_i + r_n$ auch $f' = \sum\limits_{i=1}^{n} f_i' + r_n' \ge \sum\limits_{i=1}^{n} f_i' \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$. Das impliziert $\sum\limits_{i=1}^{\infty} f_i' \le f' \quad \lambda$-fü.

   ad 1b. Da gilt $r(x) := \sum\limits_k r_{n_k}(x) \le \sum\limits_k r_{n_k}(b) \le \sum\limits_k 2^{-k} < \infty\ \forall\, x \in [a, b]$, folgt aus Punkt 1a. $\quad \sum\limits_k r_{n_k}' \le r' < \infty \;\Rightarrow\; \lim\limits_k r_{n_k}' = 0 \quad \lambda$-fü.

   ad 1c. Aus $f = \sum\limits_{i=1}^{n_k} f_i + r_{n_k}$ und $\lim\limits_k r_{n_k}' = 0 \quad \lambda$-fü folgt aber schließlich $f' = \lim\limits_k \sum\limits_{i=1}^{n_k} f_i' = \sum\limits_{i=1}^{\infty} f_i'$.

   Lösung 2: Beginne mit Punkt 1b.: Die r_{n_k} sind als Summen monoton wachsender Funktionen selbst monoton wachsend und wegen $r_{n_k}(b) \le 2^{-k}$ gilt $r_{n_k} \in \mathcal{BV}(a, b)$. Daher sind sie λ–fü differenzierbar mit $r_{n_k}' \ge 0$. Aus dem Satz von Lebesgue folgt $\int_a^b r_{n_k}'\, d\lambda \le r_{n_k}(b) - r_{n_k}(a) = r_{n_k}(b) \le 2^{-k}$. Nach dem Satz von Levi gilt dann

$$\int\limits_a^b \sum_k r_{n_k}'\, d\lambda = \sum_k \int\limits_a^b r_{n_k}'\, d\lambda \le \sum_k 2^{-k} < \infty \Rightarrow \sum_k r_{n_k}' < \infty \ \lambda\text{–fü}.$$

   Damit gilt $\lim\limits_k r_{n_k}' = 0$. Punkt 1c. geht wie oben. Punkt 1a. ist unnötig.

2. Gegeben seien folgende Verteilungsfunktionen auf $\mathbb{R}$:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 0 \\ x & \text{falls } 0 \le x < 1 \\ x+1 & \text{falls } 1 \le x < 2 \\ 3 & \text{falls } x \ge 2 \end{cases} \qquad G(x) = \begin{cases} x & \text{falls } x < 1 \\ x^2 & \text{falls } 1 \le x < 2 \\ 5 & \text{falls } x \ge 2 \end{cases}$$

Bestimmen Sie die Lebesgue-Zerlegung von μ_G bezüglich μ_F sowie die Radon-Nikodym-Dichte $\frac{d\mu_G}{d\mu_F}$ des absolut stetigen Anteils.

Lösung:

$$\frac{d\mu_{G_c}}{d\mu_F} = \frac{d\mu_{G_c}}{d\lambda}\,\frac{d\lambda}{d\mu_F} = \frac{d\mu_{G_c}}{d\lambda}\left(\frac{d\mu_F}{d\lambda}\right)^{-1} = \begin{cases} 1 & \text{falls } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{falls } x = 1 \\ 2x & \text{falls } 1 < x < 2 \\ 1 & \text{falls } x = 2 \end{cases}$$

Das Integral darüber gibt G_c:

$$G_c(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < 0 \\ x & \text{falls } 0 \le x < 1 \\ x^2 & \text{falls } 1 \le x < 2 \\ 4 & \text{falls } x \ge 2 \end{cases}$$

Die Verteilungsfunktion des singulären Anteils ist

$$G_s(x) = G(x) - G_c(x) = \begin{cases} x & \text{falls } x < 0 \\ 0 & \text{falls } 0 \le x < 2 \\ 1 & \text{falls } x \ge 2 \end{cases}$$

3. Man zeige, dass auf $\mathfrak{S} := \{B \times \mathbb{R} : \ B \in \mathfrak{B}\,\}$ das Maß $\nu(B \times \mathbb{R}) := \lambda(B)$ absolut stetig bezüglich $\mu(B \times \mathbb{R}) := \lambda_2(B \times \mathbb{R})$ ist, dass es aber keine Dichte $\frac{d\nu}{d\mu}$ gibt. Widerspricht dies dem Satz von Radon-Nikodym ?

Beweis: $\mu(B \times \mathbb{R}) = 0 \ \Rightarrow\ \lambda(B) = \nu(B \times \mathbb{R}) = 0 \ \Rightarrow\ \nu \ll \mu\,.$
Aber für $f \equiv 0$ gilt $\int\limits_{[0,1]\times\mathbb{R}} f\,d\mu = 0 \neq \nu([0,1] \times \mathbb{R}) = 1\,,$ und für alle $f \ge 0\,, f \neq 0$ μ-fü gilt $\int\limits_{[0,1]\times\mathbb{R}} f\,d\mu = \infty \neq \nu([0,1] \times \mathbb{R})\,.$
Kein Widerspruch, da μ nicht σ-endlich.

4. Sind $(\Omega_i, \mathfrak{S}_i, \mu_i)$ $\quad i = 1, 2$ zwei σ-endliche Maßräume, so zeige man, dass aus $\nu_i \ll \mu_i \quad i = 1, 2$ folgt: $\nu_1 \otimes \nu_2 \ll \mu_1 \otimes \mu_2$, und dass dann gilt:

$$\frac{d\nu_1 \otimes \nu_2}{d\mu_1 \otimes \mu_2} = \frac{d\nu_1}{d\mu_1}\,\frac{d\nu_2}{d\mu_2}.$$

Lösung: Nach dem Satz von Fubini ist

$$\begin{aligned}\rho(A \times B) &:= \int\limits_{A\times B} \frac{d\nu_1}{d\mu_1}(x)\,\frac{d\nu_2}{d\mu_2}(y)\,d(\mu_1 \otimes \mu_2)(x,y)\\ &= \int\limits_A \int\limits_B \frac{d\nu_1}{d\mu_1}(x)\,\frac{d\nu_2}{d\mu_2}(y)\,d\mu_2(y) d\mu_1(x)\\ &= \int_A \frac{d\nu_1}{d\mu_1}\,d\mu_1 \int_B \frac{d\nu_2}{d\mu_2}\,d\mu_2 = \nu_1(A)\,\nu_2(B) = \nu_1 \otimes \nu_2(A \times B).\end{aligned}$$

Also stimmt das Maß ρ für messbare Rechtecke $A \times B$ mit dem Produktmaß überein und wegen des Fortsetzungssatzes gilt daher $\rho = \nu_1 \otimes \nu_2$. Daher ist der Integrand $\frac{d\nu_1}{d\mu_1} \cdot \frac{d\nu_2}{d\mu_2}$ die Radon-Nikodym-Ableitung von $\nu_1 \otimes \nu_2$, d.h. $\frac{d\nu_1 \otimes \nu_2}{d\mu_1 \otimes \mu_2} = \frac{d\nu_1}{d\mu_1}\,\frac{d\nu_2}{d\mu_2}$.
Die absolute Stetigkeit folgt sofort aus der Integraldarstellung.

5. Man zeige, dass selbst dann , wenn μ endlich und $\nu \quad \sigma$-endlich ist, aus $\nu \ll \mu$ im Allgemeinen nicht folgt, dass es für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass $\mu(A) \leq \delta \;\Rightarrow\; \nu(A) \leq \varepsilon$.

   Gegenbeispiel : Auf dem Raum $(\mathbb{N}\,, \mathfrak{P}(\mathbb{N})\,)$ ist $\zeta(A) := |A| \quad \sigma$- endlich und $\mu(A) := \sum\limits_{n\in A} 2^{-n}$ endlich. Aus $\mu(A) = 0$ folgt $A = \emptyset$. Daraus folgt $\zeta(A) = 0 \;\Rightarrow\; \zeta \ll \mu$. Für $A_n := \{i \in \mathbb{N} : \; i \geq n\} \searrow \emptyset$, gilt, da μ endlich ist, $\lim_n \mu(A_n) = 0$. Andererseits gilt $\zeta(A_n) = \infty, \; \forall\, n \in \mathbb{N}$.

6. Man zeige, dass auf einem σ-endlichen Maßraum $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ jedes Maß $\nu \leq \mu$ eine μ–fü eindeutig bestimmte Dichte $\frac{d\nu}{d\mu}$ besitzt mit $\frac{d\nu}{d\mu} \leq 1 \mu$–fü.

   Beweis: $\nu \leq \mu \Rightarrow \nu \ll \mu \Rightarrow \exists\, \frac{d\nu}{d\mu}$. Wegen $\nu \leq \mu$ ist aber auch $\rho := \mu - \nu$ ein Maß, und es gilt

   $$\rho(A) = \mu(A) - \nu(A) = \int\limits_A 1\,d\mu - \int\limits_A \frac{d\nu}{d\mu}\,d\mu = \int\limits_A \left(1 - \frac{d\nu}{d\mu}\right)\,d\mu.$$

   Also gilt $1 - \frac{d\nu}{d\mu} = \frac{d\rho}{d\mu} \geq 0$ μ–fü $\Rightarrow \frac{d\nu}{d\mu} \leq 1$ μ–fü.

7. Für endliche Maße ν_n und $\nu := \sum\limits_n \nu_n$ auf dem endlichen Maßraum $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ mit den Lebesgue-Zerlegungen $\nu_c \ll \mu, \nu_{n,c} \ll \mu, \nu_s \perp \mu$ und $\nu_{n,s} \perp \mu$ zeige man $\nu_c = \sum\limits_n \nu_{n,c} \;\wedge\; \nu_s = \sum\limits_n \nu_{n,s}$ sowie $\sum\limits_n \frac{d\nu_{n,c}}{d\mu} = \frac{d\nu_c}{d\mu}$.
   Damit beweise man Beispiel 1. Punkt 1c. auf andere Art.

   Lösung: Sind $N_0\,, N_n \in \mathfrak{S}$ mit $\mu(N_n) = 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}_0$ und $\nu_s(N_0^c) = 0$ sowie $\nu_{n,s}(N_n^c) = 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$, dann gilt für $N := \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} N_n$ natürlich

$\mu(N)=0$ und $\nu_s(N^c)=0\,,\ \nu_{n,s}(N^c)=0 \quad \forall\, n\in\mathbb{N}$. Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\nu_c(A) &= \nu_c(A\cap N^c) = \nu_c(A\cap N^c) + \nu_s(A\cap N^c) = \nu(A\cap N^c) \\
&= \sum_n \nu_n(A\cap N^c) = \sum_n \left(\, \nu_{n,c}(A\cap N^c) + \nu_{n,s}(A\cap N^c)\,\right) \\
&= \sum_n \nu_{n,c}(A\cap N^c) = \sum_n \left(\, \nu_{n,c}(A\cap N^c) + \nu_{n,c}(A\cap N)\,\right) = \sum_n \nu_{n,c}(A)\,.
\end{aligned}$$

$$\nu_s(A) = \nu(A) - \nu_c(A) = \sum_n \left(\, \nu_n(A) - \nu_{n,c}(A)\,\right) = \sum_n \nu_{n,s}(A)\,.$$

Aus dem Satz von B. Levi folgt

$$\int_A \sum_n \frac{d\nu_{n,c}}{d\mu}\, d\mu = \sum_n \int_A \frac{d\nu_{n,c}}{d\mu}\, d\mu = \sum_n \nu_{n,c}(A) = \nu_c(A) \quad \forall\, A\in\mathfrak{S}\,.$$

Da die Radon-Nikodym-Dichte eindeutig ist, folgt daraus $\sum\limits_n \frac{d\nu_{n,c}}{d\mu} = \frac{d\nu_c}{d\mu}$.

Fasst man die rechtsstetigen Versionen von $f_n\,, f$ als Verteilungsfunktionen von Lebesgue-Stieltjes-Maßen ν_n und ν mit den Lebesgue-Zerlegungen $\nu_n = \nu_{n,c} + \nu_{n,s}, \nu = \nu_c + \nu_s$ auf, dann gilt $f_n' = \frac{d\nu_{n,c}}{d\lambda}$ und $f' = \frac{d\nu_c}{d\lambda}$. Daraus folgt $\sum\limits_n f_n' = \sum\limits_n \frac{d\nu_{n,c}}{d\lambda} = \frac{d\nu_c}{d\lambda} = f' \quad \lambda$-fü.