7. Übung aus Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie
WS 2015

1. Beweisen Sie, dass jede rechtsstetige Funktion $f \in \mathcal{BV}(a,b)$ die Differenz von zwei rechtsstetigen, monoton wachsenden Funktionen ist.

2. Für $f : [a\,,b\,] \to \mathbb{R}$ beweise man die folgenden Aussagen:

   (a) Stetige Funktionen müssen nicht von beschränkter Variation sein.

   (b) Stetige, monotone Funktionen müssen nicht absolut stetig sein.

   (c) Gibt es ein $C \in \mathbb{R}^+$ mit $|f(x) - f(y)| \leq C\,|x - y|\,,\ \forall\, x\,,y \in [a\,,b\,]\,,$ so ist f absolut stetig.

   (d) Wenn f auf $[a\,,b\,]$ stetig ist und die Ableitung f' von f auf $(a\,,b\,)$ existiert und beschränkt ist, ist f absolut stetig.

   (e) Wenn f in jedem Punkt von $(a\,,b\,)$ differenzierbar ist, muss f nicht absolut stetig sein.

3. Man nennt einen Punkt $x \in A \subseteq \mathbb{R}$ einen Dichtepunkt von A, wenn gilt $\lim\limits_{h \searrow 0} \frac{\lambda^*(A \cap (x-h,x+h)\,)}{2\,h} = 1$ (λ^* ist das äußere Lebesgue-Maß). Man beweise, dass jedes $A \in \mathfrak{L}$ bis auf eine λ-Nullmenge nur aus Dichtepunkten besteht.
   Hinweis: Man kann o.E.d.A. annehmen $A \subseteq [a\,,b]\,,\ a\,,b \in \mathbb{R}$ (warum?) $\lambda(A \cap [a,x]) = \int_{[a,x]} \mathbb{1}_A \, d\lambda\,.$

4. Man zeige, dass jedes $A \subseteq \mathbb{R}$ bis auf eine λ-Nullmenge nur aus Dichtepunkten besteht.
   Hinweis: Zu jedem $A \subseteq \mathbb{R}$ gibt es ein $A \subseteq B \in \mathfrak{L}$ mit $\lambda^*(A) = \lambda(B)\,.$

5. Ist $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ ein Maßraum und sind $p_1, \ldots, p_n$ Zahlen aus $(1, \infty)$ mit $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i} = 1$, so zeige man, dass für alle messbaren $f_i,\ 1 \leq i \leq n$ gilt

$$\left\| \prod_{i=1}^{n} f_i \right\|_1 \leq \prod_{i=1}^{n} \|f_i\|_{p_i}\,. \tag{1}$$

6. Man zeige:

   (a) Ist φ strikt konvex, so folgt aus $\mathbb{E}\varphi(X) = \varphi(\mathbb{E}X)$, also Gleichheit in der Jensen'schen Ungleichung, $X = \mathbb{E}X\ P$–fs.

(b) Ist $P := (p_1, \dots, p_m)$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\{\omega_1, \dots, \omega_m\}$, so gilt für jedes Maß $Q := (q_1, \dots, q_m)$ mit $\sum\limits_{i=1}^{m} q_i \leq 1$

$$H(P) := \sum_{i=1}^{m} p_i \, \log \frac{1}{p_i} \leq \sum_{i=1}^{m} p_i \, \log \frac{1}{q_i}.$$

(c) $H(P) \leq \log m$.

(d) $D(P|Q) := \sum\limits_{i=1}^{m} p_i \, \log \frac{p_i}{q_i} = 0 \;\Rightarrow\; P = Q$.

7. Man suche einen σ-endlichen Maßraum mit $\mathcal{L}_p \subseteq \mathcal{L}_q \; \forall \; 1 \leq p \leq q \leq \infty$.