7. Übung aus Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie
WS 2015

1. Beweisen Sie, dass jede rechtsstetige Funktion $f \in \mathcal{BV}(a,b)$ die Differenz von zwei rechtsstetigen, monoton wachsenden Funktionen ist.

   Lösung 1: Zu $a < x < b, \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0 : \ |f(x) - f(y)| < \varepsilon$ für alle $y \in [x, x + \delta]$. Ist nun $x = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ eine Partition von $[x, b]$, für die gilt $V_x^b f - \varepsilon \leq \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})|$, so gilt entweder $x < x_1 \leq x + \delta$ oder aber

$$
\begin{aligned}
V_x^b f - \varepsilon &\leq \sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| \\
&\leq |f(x+\delta) - f(x)| + |f(x_1) - f(x+\delta)| + \sum_{i=2}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| .
\end{aligned}
$$

   Man kann daher o.E.d.A. annehmen $x < x_1 \leq x + \delta$. Damit gilt

$$
V_x^b f - \varepsilon \leq |f(x_1) - f(x_0)| + \sum_{i=2}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq \varepsilon + V_{x_1}^b f .
$$

   Mit $v(y) := V_a^y f$ folgt daraus $v(x_1) - v(x) = V_x^b f - V_{x_1}^b f \leq 2\,\varepsilon$. Da v monoton steigt, gilt damit auch $v(y) - v(x) \leq 2\,\varepsilon \quad \forall\, x \leq y \leq x_1$, d.h. v ist rechtsstetig. Aber mit f und v ist auch die monoton wachsende Funktion $u := v - f$ rechtsstetig.

   Lösung 2: $f \in \mathcal{BV}(a,b) \quad \Rightarrow \quad \exists\ g \nearrow, h \nearrow$: $f = g - h$. Da g, h monoton sind, haben sie nur höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen, und daher ist S, die Menge der Punkte in denen sowohl g als auch h stetig sind, dicht. Sind g_+, h_+ die rechtsstetigen Versionen von g, h und ist $x \in \mathbb{R}$ beliebig, so gibt es $x_n \searrow x,\ x_n \in S \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$. Daher gilt

$$
\begin{aligned}
g_+(x) - h_+(x) &= \lim_n (g_+(x_n) - h_+(x_n)) \\
&= \lim_n (g(x_n) - h(x_n)) = \lim_n f(x_n) = f(x) \quad \Rightarrow \quad f = g_+ - h_+ .
\end{aligned}
$$

2. Für $f : \ [a\,, b\,] \to \mathbb{R}$ beweise man die folgenden Aussagen:

   (a) Stetige Funktionen müssen nicht von beschränkter Variation sein.

   (b) Stetige, monotone Funktionen müssen nicht absolut stetig sein.

   (c) Gibt es ein $C \in \mathbb{R}^+$ mit $|f(x) - f(y)| \leq C\,|x - y|$, $\forall\, x\,, y \in [a\,, b\,]$, so ist f absolut stetig.

(d) Wenn f auf $[a\,,b\,]$ stetig ist und die Ableitung f' von f auf $(a\,,b\,)$ existiert und beschränkt ist, ist f absolut stetig.

(e) Wenn f in jedem Punkt von $(a\,,b\,)$ differenzierbar ist, muss f nicht absolut stetig sein.

Beweis:

(a) $f(x) := x\,\cos(\frac{\pi}{x})$ ist auf $[0\,,1]$ stetig, aber für die Partition $0\,,\frac{1}{2\,n},\frac{1}{2\,n-1}\,,\ldots,\frac{1}{3}\,,\frac{1}{2}\,,1$ gilt

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{2\,n}|f(x_i)-f(x_{i-1})| &= \left|\frac{1}{2\,n}\right| + \left|-\frac{1}{2\,n-1}-\frac{1}{2\,n}\right|\\ &+\left|\frac{1}{2\,n-2}+\frac{1}{2\,n-1}\right| + \ldots + \left|\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right| + \left|-1-\frac{1}{2}\right|\\ &= \frac{1}{2\,n}+\frac{1}{2\,n-1}+\frac{1}{2\,n}+\frac{1}{2\,n-2}+\frac{1}{2\,n-1}+\ldots\\ &+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+1+\frac{1}{2} = \sum_{i=1}^{n}\frac{2}{2\,i} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\to\infty.\end{aligned}$$

(b) ein Gegenbeispiel ist die Cantor-Funktion.

(c) Sind $(a_i\,,b_i),\ i=1,\ldots,n$ disjunkte Intervalle mit $\sum\limits_{i=1}^{n}(b_i-a_i)<\delta$, so folgt daraus $\sum\limits_{i=1}^{n}|f(b_i)-fa_i)|<C\,\sum\limits_{i=1}^{n}(b_i-a_i)<C\,\delta.$

(d) Aus dem Mittelwertsatz folgt mit $x<z<y$

$$|f(x)-f(y)| = |f'(z)|\,|x-y| \le C\,|x-y|\,,\ \forall\,x\,,y\in[a\,,b\,]\,,$$

sodass man den vorigen Punkt anwenden kann.

(e) Nochmals $f(x) := x\,\cos(\frac{\pi}{x})$ ist in $(a,b\,)$ differenzierbar mit $f'(x)=\frac{1}{x}\,\sin(\frac{\pi}{x})+\cos(\frac{\pi}{x})$, aber nicht von beschränkter Variation und damit auch nicht absolut stetig.

3. Man nennt einen Punkt $x\in A\subseteq\mathbb{R}$ einen Dichtepunkt von A, wenn gilt $\lim\limits_{h\searrow 0}\frac{\lambda^*(A\cap(x-h,x+h))}{2\,h}=1$ (λ^* ist das äußere Lebesgue-Maß). Man beweise, dass jedes $A\in\mathfrak{L}$ bis auf eine λ-Nullmenge nur aus Dichtepunkten besteht.
Hinweis: Man kann o.E.d.A. annehmen $A\subseteq[a\,,b]\,,\ a\,,b\in\mathbb{R}$ (warum?) $\lambda(A\cap[a,x])=\int_{[a,x]}\mathbb{1}_A\,d\lambda$.
Beweis: Bezeichnet D_A die Menge der Dichtepunkte von A, so folgt aus $\lambda(D_A^c\cap[-n\,,n])=0\quad\forall\,n\in\mathbb{N}$ sofort $\lambda(D_A^c)=0$.
Für $A\subseteq[a\,,b]\,,\ a\,,b\in\mathbb{R}$ ist $\mathbb{1}_A$ Lebesgue-integrierbar, und daher ist

$F(x) := \int_{[a,x]} \mathbb{1}_A \, d\lambda$ auf $[a\,,b]$ differenzierbar λ-fü mit $F' = \mathbb{1}_A \quad \lambda$-fü.
Daher gilt $\lim\limits_{h\searrow 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = 1 \quad \lambda$-fü und $\lim\limits_{h\searrow 0} \frac{F(x)-F(x-h)}{h} = 1 \quad \lambda$-fü.
Daraus folgt λ-fü auf A

$$\lim_{h\searrow 0} \frac{\lambda(A\cap(x-h,x+h)\,)}{2\,h} = \lim_{h\searrow 0} \frac{F(x+h)-F(x-h)}{2\,h}$$
$$= \lim_{h\searrow 0} \frac{1}{2}\left(\frac{F(x+h)-F(x)}{h} + \frac{F(x)-F(x-h)}{h}\right) = 1\,.$$

4. Man zeige, dass jedes $A \subseteq \mathbb{R}$ bis auf eine λ-Nullmenge nur aus Dichtepunkten besteht.
Hinweis: Zu jedem $A \subseteq \mathbb{R}$ gibt es ein $A \subseteq B \in \mathfrak{L}$ mit $\lambda^*(A) = \lambda(B)\,$.

Beweis: Wie in Bsp. 3. betrachten wir $A \subseteq [a\,,b]\,, \quad a\,,b \in \mathbb{R}\,$.
Da das Intervall $(x-h\,,x+h)$ Carathéodory-messbar ist, zerlegt es jede Menge additiv. Daraus, aus $A \subseteq B \in \mathfrak{L}$ und $\lambda^*(A) = \lambda(B)$ folgt

$$\lambda^*(A\cap(x-h\,,x+h)\,) + \lambda^*(A\cap(x-h\,,x+h)^c\,) = \lambda^*(A)$$
$$= \lambda(B) = \lambda(B\cap(x-h\,,x+h)\,) + \lambda(B\cap(x-h\,,x+h)^c\,)\,. \quad (1)$$

Da $A \subseteq B$, gilt $\lambda^*(A\cap(x-h\,,x+h)\,) \le \lambda(B\cap(x-h\,,x+h)\,)$ und $\lambda^*(A\cap(x-h\,,x+h)^c) \le \lambda(B\cap(x-h\,,x+h)^c)$. Dies und (1) ergibt $\lambda^*(A\cap(x-h\,,x+h)\,) = \lambda(B\cap(x-h\,,x+h)\,) \quad \forall\, h>0$. Daraus und aus Bsp. 3. folgt $\lim\limits_{h\searrow 0} \frac{\lambda^*(A\cap(x-h,x+h)\,)}{2\,h} = \frac{\lambda(B\cap(x-h,x+h)\,)}{2\,h} = 1 \quad \forall\, x \in D_B$ und $\lambda(D_B^c) = 0$, d.h. $\lim\limits_{h\searrow 0} \frac{\lambda^*(A\cap(x-h,x+h)\,)}{2\,h} = 1 \;\forall\; x \in A\cap D_B$ und $\lambda^*(A\setminus D_B) = 0\,$.

5. Ist $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ ein Maßraum und sind $p_1, \ldots, p_n$ Zahlen aus $(1,\infty)$ mit $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i} = 1$, so zeige man, dass für alle messbaren $f_i,\; 1 \le i \le n$ gilt

$$\left\| \prod_{i=1}^{n} f_i \right\|_1 \le \prod_{i=1}^{n} \|f_i\|_{p_i}\,. \quad (2)$$

Beweis: Falls $\|f_i\|_{p_i} = 0$ für ein i, so folgt daraus $f_i = 0$ μ–fü. Damit gilt auch $\prod\limits_{i=1}^{n} f_i = 0$, und Ungleichung (2) ist trivial. Ebenso gilt die Ungleichung, wenn es ein i gibt mit $\|f_i\|_{p_i} = \infty$. Wir können daher o.E.d.A. $0 < \|f_i\|_{p_i} < \infty \quad \forall\, 1 \le i \le n$ annehmen.
Lösung1:
Aus $0 \le \alpha_i \le 1$ mit $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ und $0 \le x_i,\; 1 \le i \le n$ folgt nach der

Jensen-Ungleichung $\log\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i\,x_i\right) \;\geq\; \sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i\,\log x_i \;=\; \log\left(\prod\limits_{i=1}^{n}x_i^{\alpha_i}\right)$.
Da der Logarithmus monoton steigt, impliziert das

$$\prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} \leq \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\,x_i. \tag{3}$$

Mit $\alpha_i := \frac{1}{p_i}$ und $x_i := \frac{|f_i|^{p_i}}{\|f_i\|_{p_i}^{p_i}} \quad \forall\, 1 \leq i \leq n$ ergibt Ungleichung (3)

$$\prod_{i=1}^{n}\frac{|f_i|}{\|f_i\|_{p_i}} \leq \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i}\,\frac{|f_i|^{p_i}}{\|f_i\|_{p_i}^{p_i}}.$$

Integration nach μ liefert

$$\left(\prod_{i=1}^{n}\|f_i\|_{p_i}\right)^{-1}\int\prod_{i=1}^{n}|f_i|\;d\mu \leq \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i}\,\frac{\int|f_i|^{p_i}\;d\mu}{\|f_i\|_{p_i}^{p_i}} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i} = 1.$$

Daraus folgt sofort $\left\|\prod\limits_{i=1}^{n}f_i\right\|_1 = \int\prod\limits_{i=1}^{n}|f_i|\;d\mu \leq \prod\limits_{i=1}^{n}\|f_i\|_{p_i}$.

Lösung 2: Für $n = 2$ ist (2) die klassische Hölder-Ungleichung. Wir beweisen die Ungleichung nun mit vollständiger Induktion, indem wir zeigen, dass sie für n gilt, wenn sie für $n-1$ richtig ist.
Mit $q := \frac{p_n}{p_n-1}$ gilt $\frac{1}{p_n}+\frac{1}{q} = 1$. Daraus folgt

$$\int\left|\prod_{i=1}^{n}f_i\right|\;d\mu = \int\left|\prod_{i=1}^{n-1}f_i\right|\;|f_n|\;d\mu \leq \left(\int\prod_{i=1}^{n-1}|f_i|^q\;d\mu\right)^{\frac{1}{q}}\;\|f_n\|_{p_n}. \tag{4}$$

Mit $r_i := \frac{p_i}{q}, 1 \leq i \leq n-1$ gilt $\sum\limits_{i=1}^{n-1}\frac{1}{r_i} = \frac{p_n}{p_n-1}\sum\limits_{i=1}^{n-1}\frac{1}{p_i} = \frac{p_n}{p_n-1}\left(1-\frac{1}{p_n}\right) = 1$.
Mit $g_i := |f_i|^q$ und $r_i,\ i \leq n-1$ folgt aus der Induktionsvoraussetzung

$$\int\prod_{i=1}^{n-1}|f_i|^q\;d\mu \leq \prod_{i=1}^{n-1}\left(\int|f_i|^{q\,\frac{p_i}{q}}\;d\mu\right)^{\frac{q}{p_i}} = \prod_{i=1}^{n-1}\|f_i\|_{p_i}^q,$$

d.h. $\left(\int\prod\limits_{i=1}^{n-1}|f_i|^q\;d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \leq \prod\limits_{i=1}^{n-1}\|f_i\|_{p_i}$. Eingesetzt in Ungleichung (4) ergibt das $\int\left|\prod\limits_{i=1}^{n}f_i\right|\;d\mu \leq \prod\limits_{i=1}^{n}\|f_i\|_{p_i}$. Damit ist (2) auch für n bewiesen.

6. Man zeige:

   (a) Ist φ strikt konvex, so folgt aus $\mathbb{E}\varphi(X) = \varphi(\mathbb{E}X)$, also Gleichheit in der Jensen'schen Ungleichung, $X = \mathbb{E}X$ P–fs.

(b) Ist $P := (p_1, \dots, p_m)$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\{\omega_1, \dots, \omega_m\}$, so gilt für jedes Maß $Q := (q_1, \dots, q_m)$ mit $\sum\limits_{i=1}^m q_i \leq 1$

$$H(P) := \sum_{i=1}^m p_i \, \log \frac{1}{p_i} \leq \sum_{i=1}^m p_i \, \log \frac{1}{q_i}.$$

(c) $H(P) \leq \log m$.

(d) $D(P|Q) := \sum\limits_{i=1}^m p_i \, \log \frac{p_i}{q_i} = 0 \;\Rightarrow\; P = Q$.

Beweis:

(a) Aus $\mathbb{E}\varphi(X) = \varphi(\mathbb{E}X)$ folgt $\mathbb{E}\left[\varphi(X) - \varphi(\mathbb{E}X) - k\,(X - \mathbb{E}X)\right] = 0$. Da für $k \in [\partial^l \varphi(\mathbb{E}X), \partial^r \varphi(\mathbb{E}X)]$ gilt $\varphi(X) \geq \varphi(\mathbb{E}X) + k\,(X - \mathbb{E}X)$, impliziert das $\varphi(X) - \varphi(\mathbb{E}X) - k\,(X - \mathbb{E}X) = 0$ P–fs. Aber bei strikt konvexem φ gilt für jedes $y \neq x$ und $k \in [\partial^l \varphi(x), \partial^r \varphi(x)]$ bekanntlich $\varphi(y) - \varphi(x) - k\,(y - x) > 0$. Somit gilt $X = \mathbb{E}X$ P–fs.

(b) $\log$ ist konkav, daher folgt aus der Jensen-Ungleichung, angewendet auf $X(\omega_i) := \frac{q_i}{p_i}$

$$\sum_{i=1}^m p_i \, \log \frac{1}{p_i} - \sum_{i=1}^m p_i \, \log \frac{1}{q_i} = \sum_{i=1}^m p_i \, \log \frac{q_i}{p_i} = -D(P|Q)$$
$$= \mathbb{E} \log X \leq \log \left(\sum_{i=1}^m p_i \, \frac{q_i}{p_i} \right) = \log \left(\sum_{i=1}^m q_i \right) \leq \log 1 = 0. \quad (5)$$

(c) Für $q_i := \frac{1}{m} \quad 1 \leq i \leq m$ erhält man $H(P) \leq \log m$.

(d) Für $D(P|Q) = 0$ folgt aus Ungleichung (5) $\log \left(\sum\limits_{i=1}^m q_i \right) = 0$. Somit gilt nun $\sum\limits_{i=1}^m q_i = 1$. Da $\log$ strikt konkav ist, folgt aus Punkt (a) $X(\omega_i) = \frac{q_i}{p_i} = \mathbb{E}X = \sum\limits_{i=1}^m p_i \, \frac{q_i}{p_i} = \sum\limits_{i=1}^m q_i = 1 \quad \forall\, i \Rightarrow P = Q$.

7. Man suche einen σ-endlichen Maßraum mit $\mathcal{L}_p \subseteq \mathcal{L}_q \; \forall\; 1 \leq p \leq q \leq \infty$.

Lösung: Der Raum $(\mathbb{N}, \mathfrak{P}(\mathbb{N}), \mu)$ mit $\mu(n) = n$ ist natürlich σ-endlich. Gilt $\infty > \int |f|^p \, d\mu = \sum\limits_n |f(n)|^p \, n$, so muss es ein $N \in \mathbb{N}$ geben, sodass $|f(n)| < 1 \quad \forall\; n > N$. Daraus folgt $|f(n)|^q \leq |f(n)|^p < 1 \quad \forall\; n > N$ und $p \leq q$. Somit gilt $\|f\|_\infty \leq \max\{|f(1)|, \dots, |f(N)|, 1\} < \infty$ aber auch

$$\begin{aligned}\int |f|^q \, d\mu &= \sum_n^N |f(n)|^q \, n + \sum_{n>N} |f(n)|^q \, n \\ &\leq \sum_n^N |f(n)|^q \, n + \sum_{n>N} |f(n)|^p \, n < \infty \,.\end{aligned}$$