8. Übung aus Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie
WS 2015

1. Man beweise, dass für Zufallsvariable X, deren Momentenerzeugende $M_X(t) := \mathbb{E}\mathrm{e}^{t\,X}$ für ein $\hat{t} > 0$ existiert (d.h. $M_X(\hat{t}) < \infty$), gilt

$$P(X \geq x) \leq \inf_{s \geq o} \mathrm{e}^{-s\,x}\, M_X(s) \quad \text{(Chernoff-Ungleichung)}. \qquad (1)$$

   Sodann schätze man die Wahrscheinlichkeit $P(X \geq 80),\ X \sim B_{100,0.5}$ mit Hilfe der Ungleichungen von Markov, Tschebyscheff und Chernoff ab, und vergleiche die drei Schranken.

2. Für $0 \leq f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathfrak{B}, \lambda)$ und $0 \leq g \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}, \mathfrak{B}, \lambda),\ 1 \leq p < \infty$ zeige man, dass die Faltungsdichte $f * g$ $\mathbf{L}_p-$integrierbar ist und gilt

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_1\ \|g\|_p \quad \text{(Young-Ungleichung)}.$$

   Hinweis: Die Dichte $\frac{f}{\|f\|_1}$ bestimmt ein Wahrscheinlichkeitsmaß.

3. Man suche eine Funktionenfolge (f_n) auf einem endlichen Maßraum $(\Omega\,, \mathfrak{S}\,, \mu)$, sodass zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, für das gilt $\mu(A) \leq \delta \ \Rightarrow\ \int_A |f_n|\, d\mu < \varepsilon$ aber $\sup\limits_n \int |f_n|\, d\mu = \infty$, und eine Folge mit $\sup\limits_n \int |f_n|\, d\mu < \infty$, die die obige ε-δ- Bedingung nicht erfüllt.

4. Man suche eine Funktionenfolge (f_n) auf einem endlichen Maßraum $(\Omega\,, \mathfrak{S}\,, \mu)$, die gleichmäßig integrierbar ist, zu der es aber keine integrierbare Funktion g mit $g \geq |f_n| \quad \mu$-fü $\quad \forall\, n \in \mathbb{N}$ gibt.

5. Man zeige, dass auf einem endlichen Maßraum $(\Omega\,, \mathfrak{S}\,, \mu)$ für $f_n \in \mathcal{M}^+$ und $g_n := \max\limits_{1 \leq i \leq n} f_i$, gilt

$$\int\limits_{[g_n > c]} g_n\, d\mu \leq \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{[f_i > c]} f_i\, d\mu\,,$$

   und $\int g_n\, d\mu = o(n)$, wenn die f_n gleichmäßig integrierbar sind.

6. Sind $\mathcal{F}\,, \mathcal{G}$ Familien mesbarer Funktionen auf einem Maßraum $(\Omega\,, \mathfrak{S}\,, \mu)$, so zeige man:

   (a) $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{L}_1\ \wedge\ |\mathcal{F}| < \infty\ \Rightarrow\ \mathcal{F}$ ist gleichmäßig integrierbar,

   (b) $\mathcal{G}$ ist gleichmäßig integrierbar, wenn $\mathcal{F}$ gleichmäßig integrierbar ist und $\forall\, g \in \mathcal{G} \quad \exists\, f \in \mathcal{F}:\ |g| \leq |f| \quad \mu$-fü,

(c) sind $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ gleichmäßig integrierbar, so ist $\{f \vee g, f \pm g : \; f \in \mathcal{F}, g \in \mathcal{G}\}$ auch gleichmäßig integrierbar.

7. Man zeige, dass eine Familie $\{X_i : \; i \in I\}$ von Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ gleichmäßig integrierbar ist, wenn für eine Funktion $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{g(x)}{x} = \infty \quad \text{und} \quad C := \sup_i \mathbb{E}\, g(|X_i|) < \infty. \tag{2}$$

Umgekehrt zeige man, dass es eine auf $(0, \infty)$ konvexe Funktion g gibt, die die beiden obigen Bedingungen erfüllt, wenn die X_i gleichmäßig integrierbar sind.
Hinweis: Modifizieren Sie die stückweise lineare Funktion h, definiert durch $h(x) := \sum\limits_{k=1}^{\infty} k\, x\, \mathbb{1}_{[c_k, c_{k+1})}(x)$, so, dass die Unstetigkeiten in den Punkten c_k beseitigt werden, und wählen Sie geeignete c_k.