# 8. Übung aus Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie
# WS 2015

1. Man zeige, dass für $2$ Zufallsvariable $X, Y$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ gilt:

   (a) $0 < \alpha < \beta \Rightarrow (\mathbb{E}|X|^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha}} \leq (\mathbb{E}|X|^{\beta})^{\frac{1}{\beta}}$ (Ljapunoff-Ungleichung)

   (b) $X \geq 0, p > 0 \Rightarrow \frac{1}{(\mathbb{E}X)^p} \leq \mathbb{E}\frac{1}{X^p}$

   *Lösung:* Ist $\alpha < \beta$, d.h. $\frac{\beta}{\alpha} > 1$, so ist $f(x) := x^{\frac{\beta}{\alpha}}, \quad x > 0$ konvex, und aus der Jensen-Ungleichung folgt

   $$(\mathbb{E}|X|^{\alpha})^{\frac{\beta}{\alpha}} \leq \mathbb{E}\big((|X|^{\alpha})^{\frac{\beta}{\alpha}}\big) = \mathbb{E}|X|^{\beta} \Rightarrow (\mathbb{E}|X|^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha}} \leq (\mathbb{E}|X|^{\beta})^{\frac{1}{\beta}}.$$

   Auch die 2-te Ungleichung folgt aus der Jensen-Ungleichung, denn $f(x) := x^{-p}$ ist wegen $f''(x) = p(p+1)x^{-p-2} > 0$ konvex. Daher gilt

   $$f(\mathbb{E}X) = \frac{1}{(\mathbb{E}X)^p} \leq \mathbb{E}f(X) = \mathbb{E}\frac{1}{X^p}.$$

2. Für $0 \leq f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}, \mathfrak{B}, \lambda)$ und $0 \leq g \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}, \mathfrak{B}, \lambda),\ 1 \leq p < \infty$ zeige man, dass die Faltungsdichte $f * g$ $\mathbf{L}_p-$integrierbar ist und gilt

   $$\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \, \|g\|_p \quad \text{(Young-Ungleichung)}.$$

   *Hinweis:* Was für ein Maß wird durch die Dichte $\frac{f}{\|f\|_1}$ gebildet?

   *Beweis:* Da $P(A) := \int_A \frac{f}{\|f\|_1}\, d\lambda$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist, folgt aus der Jensen-Ungleichung, angewendet auf die konvexe Funktion $\phi(x) := x^p$, dem Satz von Fubini und der Translationsinvarianz von $\lambda$

   $$\begin{aligned}
   \int (f * g(s))^p \, \lambda(ds) &= \int \left( \int g(s-t)\, f(t)\, \lambda(dt) \right)^p \lambda(ds) \\
   &= \|f\|_1^p \int \left( \int g(s-t)\, \frac{f(t)}{\|f\|_1}\, \lambda(dt) \right)^p \lambda(ds) \\
   &= \|f\|_1^p \int \left( \int g(s-t)\, P(dt) \right)^p \lambda(ds) \\
   &\leq \|f\|_1^p \int \int g(s-t)^p \, P(dt)\, \lambda(ds) \\
   &= \|f\|_1^p \int \int g(s-t)^p \, \lambda(ds)\, P(dt) = \|f\|_1^p \int \int g(s)^p \, \lambda(ds)\, P(dt) \\
   &= \|f\|_1^p \int \|g\|_p^p \, P(dt) = \|f\|_1^p \, \|g\|_p^p \;\Rightarrow\; \|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \, \|g\|_p \, .
   \end{aligned}$$

3. Man suche eine Funktionenfolge $(f_n)$ auf einem endlichen Maßraum $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$, sodass zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, für das gilt $\mu(A) \leq \delta \Rightarrow \int_A |f_n| \, d\mu < \varepsilon$ aber $\sup\limits_n \int |f_n| \, d\mu = \infty$, und ebenso eine Folge mit $\sup\limits_n \int |f_n| \, d\mu < \infty$, die die obige $\varepsilon - \delta$- Bedingung nicht erfüllt.

   *Lösung:* Betrachte auf $(\mathbb{N}, \mathfrak{P}(\mathbb{N}), \mu)$ mit $\mu(\{k\}) := 2^{-k} \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$ die Folge $f_n := n \, 1_{\{1\}}$. Klarerweise gilt $\int f_n \, d\mu = \frac{n}{2} \to \infty$, aber für alle $\varepsilon > 0$ gilt $\mu(A) \leq \delta := \frac{1}{4} \Rightarrow 1 \notin A \Rightarrow \int_A f_n \, d\mu = 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$.

   $f_n := 2^n \, 1_{\{n\}}$. Es gilt $\int f_n \, d\mu = 1 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$. Aber zu $0 < \varepsilon < 1$ gibt es zu jedem $\delta > 0$ ein $n : \; 2^{-n} \leq \delta \Rightarrow \mu(\{n\}) \leq \delta \wedge \int_{\{n\}} f_n \, d\mu = 1 > \varepsilon$.

   Ein anderes Bsp: $f_n := n \, 1_{[0, \frac{1}{n}]}$ auf $([0,1], \mathfrak{B} \cap [0,1], \lambda)$

4. Man suche eine Funktionenfolge $(f_n)$ auf einem endlichen Maßraum $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$, die gleichmäßig integrierbar ist, zu der es aber keine integrierbare Funktion $g$ mit $g \geq |f_n| \quad \mu$-fü $\quad \forall\, n \in \mathbb{N}$ gibt.

   *Lösung:* Betrachte auf $(\mathbb{N}, \mathfrak{P}(\mathbb{N}), \mu)$ mit $\mu(\{k\}) := 2^{-k} \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$ die Folge $f_n := \frac{2^n}{n} 1_{\{n\}}$. Es gilt $\int f_n \, d\mu = \frac{1}{n} \leq 1 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$, und für alle $\varepsilon > 0$ und $c_\varepsilon := 2^{\lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil} \geq \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil$ gilt $[f_n > c_\varepsilon] = \emptyset$ für $n \leq \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil \Rightarrow \int_{[f_n > c_\varepsilon]} f_n \, d\mu = 0$. Aber für $n > \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil$ gilt $\int_{[f_n > c_\varepsilon]} f_n \, d\mu \leq \int f_n \, d\mu = \frac{1}{n} < \varepsilon$, d.h. die $f_n$ sind gleichmäßig integrierbar. Aus $g \geq f_n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$ folgt $g(k) \geq \frac{2^k}{k} \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$. Somit gilt $\int g \, d\mu \geq \sum\limits_k \frac{1}{k} = \infty$.

5. Sind $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ Familien mesbarer Funktionen auf einem Maßraum $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$, so zeige man:

   (a) $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{L}_1 \;\wedge\; |\mathcal{F}| < \infty \;\Rightarrow\; \mathcal{F}$ ist gleichmäßig integrierbar,

   (b) $\mathcal{G}$ ist gleichmäßig integrierbar, wenn $\mathcal{F}$ gleichmäßig integrierbar ist und $\forall\, g \in \mathcal{G} \quad \exists\, f \in \mathcal{F} : \; |g| \leq |f| \quad \mu$-fü,

   (c) sind $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ gleichmäßig integrierbar, so ist $\{f \vee g, f \pm g : \; f \in \mathcal{F}, g \in \mathcal{G}\}$ auch gleichmäßig integrierbar.

   *Beweis:*

   (a) Für $\mathcal{F} := \{f_1, \ldots, f_n\} \subseteq \mathcal{L}_1^+$ gilt $h := \sum\limits_{i=1}^{n} |f_i| \in \mathcal{L}_1$ und natürlich $\int (|f_i| - h)^+ \, d\mu = 0 \quad \forall\, 1 \leq i \leq n$.

   (b) Ist $\varepsilon > 0$ und $h_\varepsilon \in \mathcal{L}_1^+$ mit $\sup\limits_{f \in \mathcal{F}} \int (|f| - h_\varepsilon)^+ \, d\mu \leq \varepsilon$, so gilt klarerweise $\int (|g| - h_\varepsilon)^+ \, d\mu \leq \int (|f| - h_\varepsilon)^+ \, d\mu \leq \sup\limits_{f \in \mathcal{F}} \int (|f| - h_\varepsilon)^+ \, d\mu \leq \varepsilon$,

(c) Da $|f \vee g| \leq |f|+|g|$ , $|f+g| \leq |f|+|g|$ , reicht es die gleichmäßige Integrierbarkeit von $\{|f|+|g| : f \in \mathcal{F}, g \in \mathcal{G}\}$ zu zeigen.

$$C := \sup_{f,g} \int |f|+|g|\, d\mu \leq \sup_{f} \int |f|\, d\mu + \sup_{g} \int |g|\, d\mu < \infty\,.$$

Ist $\varepsilon > 0$ , $h_\varepsilon$ , $k_\varepsilon \in \mathcal{L}_1^+$ und gilt $\int_A h_\varepsilon\, d\mu \leq \delta_1 \Rightarrow \sup\limits_{f\in\mathcal{F}} \int_A |f|\, d\mu < \varepsilon$ bzw. $\int_A k_\varepsilon\, d\mu \leq \delta_2 \Rightarrow \sup\limits_{g\in\mathcal{G}} \int_A |g|\, d\mu < \varepsilon$ , so gilt $h_\varepsilon + k_\varepsilon \in \mathcal{L}_1^+$ und $\int_A (h_\varepsilon + k_\varepsilon)\, d\mu \leq \delta := \delta_1 \wedge \delta_2 \Rightarrow \int_A h_\varepsilon\, d\mu \leq \delta_1 \wedge \int_A k_\varepsilon\, d\mu \leq \delta_2 \Rightarrow$

$$\int\limits_A |f|+|g|\, d\mu = \int\limits_A |f|\, d\mu + \int\limits_A |g|\, d\mu \leq 2\,\varepsilon\,.$$

6. Man zeige, dass eine Familie $\{X_i : \in I\}$ von Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ gleichmäßig integrierbar ist, wenn für eine Funktion $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ mit $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{g(x)}{x} = \infty$ gilt

$$C := \sup_i \mathbb{E}\, g(|X_i|) < \infty. \tag{1}$$

Umgekehrt zeige man, dass für die Funktion $h(x) := \sum\limits_{k=1}^{\infty} (x - c_k)^+$ bei geeigneter Wahl der $c_k$ gilt

$$\sup_i \mathbb{E}\, h(|X_i|) < \infty \;\wedge\; \lim_{x\to\infty} \frac{h(x)}{x} = \infty, \tag{2}$$

wenn die $X_i$ gleichmäßig integrierbar sind.

*Beweis:* Wegen $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{g(x)} = 0$ gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $c_\varepsilon$, sodass $\frac{x}{g(x)} \leq \frac{\varepsilon}{C} \quad \forall\, x \geq c_\varepsilon$. Damit gilt

$$\int\limits_{[|X_i|\geq c_\varepsilon]} |X_i|\, dP = \int\limits_{[|X_i|\geq c_\varepsilon]} \frac{|X_i|}{g(|X_i|)} g(|X_i|) dP \leq \frac{\varepsilon}{C} \int\limits_{[|X_i|\geq c_\varepsilon]} g(|X_i|) dP \leq \varepsilon.$$

Sind die $X_i$ gleichmäßig integrierbar, so gibt es zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $b_k$, sodass $2^{-k} \geq \int_{[|X_i|\geq b_k]} |X_i|\; dP$. Die $c_0 := 0,\ c_k := b_k \vee (2\, c_{k-1})$ sind strikt monoton wachsend, und für sie gilt klarerweise ebenfalls $2^{-k} \geq \int_{[|X_i|\geq c_k]} |X_i|\; dP \geq \int (|X_i| - c_k)^+\, dP. \quad \forall\, i \in I$. Das ergibt zusammen mit dem Satz über die Konvergenz durch Monotonie

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\, h(|X_i|) &= \int \sum_{k=1}^{\infty} (|X_i| - c_k)^+\, dP \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \int (|X_i| - c_k)^+\, dP \leq \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} < \infty \quad \forall\, i \in I. \end{aligned}$$

Für $x \geq 2\,c_n$ gilt $\frac{h(x)}{x} \geq \sum\limits_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{c_k}{2\,c_n}\right) \geq \frac{n}{2} \;\Rightarrow\; \lim\limits_{x\to\infty} \frac{h(x)}{x} = \infty.$