9. Übung aus Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie WS 2015

1. Man zeige, dass die bedingten Erwartungen $(\mathbb{E}(X_i|\mathfrak{A}),\ i \in I)$ einer gleichmäßig integrierbaren Familie von Zufallsvariablen $(X_i,\ i \in I)$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ ebenfalls gleichmäßig integrierbar sind für jede σ-Algebra $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{S}$. Weiters zeige man, dass dann aus $\lim\limits_n X_n = X$ P–fs folgt $\lim\limits_n \|\mathbb{E}(X_n|\mathfrak{A}) - \mathbb{E}(X|\mathfrak{A})\|_1 = 0$, dass aber i.A. nicht gilt $\lim\limits_n \mathbb{E}(X_n|\mathfrak{A}) = \mathbb{E}(X|\mathfrak{A})$ P–fs, d.h. der verallgemeinerte Konvergenzsatz von Lebesgue für gleichmäßig integrierbare Folgen lässt sich nicht auf bedingte Erwartungen erweitern.
Hinweis: Bilden Sie aus der unabhängigen Folge (X_n) mit $X_n \sim B_{\frac{1}{n}}$ die Folgen $Y_n := (2\,n-1)\,X_{2\,n-1},\ Z_n := Y_n\,X_{2\,n}$ und vergleichen Sie das Konvergenzverhalten der Folge (Z_n) mit dem der bedingten Erwartungen $\mathbb{E}(Z_n|\mathfrak{A}_\sigma(X_{2\,n},\ n \in \mathbb{N})\,)$.

Lösung: Auf Grund der Voraussetzungen gilt $C := \sup_i \mathbb{E}\,|X_i| < \infty$. $P(|\mathbb{E}(X_i|\mathfrak{A})| \geq k) \leq \frac{1}{k}\,\mathbb{E}\,|\mathbb{E}(X_i|\mathfrak{A})| \leq \frac{1}{k}\,\mathbb{E}\,\mathbb{E}(|X_i|\,|\mathfrak{A}) = \frac{1}{k}\,\mathbb{E}\,|X_i| \leq \frac{C}{k}$ impliziert, dass es zu jedem $\delta > 0$ ein k_δ gibt, sodass für alle $i \in I$ gilt $P(|\mathbb{E}(X_i|\mathfrak{A})| \geq k_\delta) \leq \delta$. Daraus folgt $\sup\limits_j \int_{[|\mathbb{E}(X_i|\mathfrak{A})| \geq k_\delta]} |X_j|\ dP \leq \varepsilon$.
Somit gilt mit $A_i := [|\mathbb{E}(X_i|\mathfrak{A})| \geq k_\delta]$

$$\int\limits_{[|\mathbb{E}(X_i|\mathfrak{A})| \geq k_\delta]} |\mathbb{E}(X_i|\mathfrak{A})|\ dP \leq \int\limits_{A_i} \mathbb{E}(|X_i|\,|\mathfrak{A})\,dP = \int\limits_{A_i} |X_i|\ dP \leq \varepsilon.$$

Aus $\lim\limits_n X_n = X$ P–fs und der gleichmäßigen Integrierbarkeit folgt nach dem Kriterium von Vitali $\lim\limits_n \mathbb{E}\,|X_n - X| = 0$. Daher gilt

$$\mathbb{E}\ |\mathbb{E}(X_n|\mathfrak{A}) - \mathbb{E}(X|\mathfrak{A})| \leq \mathbb{E}\,\mathbb{E}(|X_n - X|\,|\mathfrak{A}) = \mathbb{E}\,|X_n - X| \to 0.$$

Für $\varepsilon > 0$ und alle $2\,n \geq c_\varepsilon := \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil$ gilt $\int_{[Z_n \geq c_\varepsilon]} Z_n\,dP = \mathbb{E}Z_n = \frac{1}{2\,n} \leq \varepsilon$, und für $2\,n < c_\varepsilon$ gilt $\int_{[Z_n \geq c_\varepsilon]} Z_n\,dP = \int_\emptyset Z_n\,dP = 0 \leq \varepsilon$, d.h. Z_n ist gleichmäßig integrierbar. Aus $\sum\limits_n P(Z_n \neq 0) = \sum\limits_n \frac{1}{2\,n\,(2\,n-1)} < \infty$ folgt nach Borel Cantelli $P(\limsup\limits_n [Z_n \neq 0]) = 0 \;\Rightarrow\; Z_n \to 0$ P–fs. Aber, da Y_n unabhängig von $\mathfrak{A} := \mathfrak{A}_\sigma(X_{2\,n},\ n \in \mathbb{N})$ ist und $X_{2\,n}$ $\mathfrak{A}$-messbar ist, gilt $\mathbb{E}(Z_n|\mathfrak{A}) = X_{2\,n}\,\mathbb{E}(Y_n|\mathfrak{A}) = X_{2\,n}\,\mathbb{E}Y_n = X_{2\,n}$. Nun folgt aus $\sum\limits_n P(X_{2n} \neq 0) = \sum\limits_n \frac{1}{2\,n} = \infty$ nach dem 2-ten Lemma von Borel Cantelli $P(\limsup\limits_n [X_{2\,n} \neq 0]) = 1 \;\Rightarrow\; \mathbb{E}(Z_n|\mathfrak{A}) = X_{2\,n} \not\to 0$ P–fs.

2. Für unabhängige Zufallsvariable $X\,,Y \sim B_p,\ 0 < p < 1$ bestimme man $\mathbb{E}\,(X\,|1 \wedge (X+Y))\,,\ \mathbb{E}\,(Y\,|1 \wedge (X+Y))$ und überprüfe, ob diese bedingten Erwartungen unabhängig sind.

   Lösung: Mit $Z := \min\{1, X+Y\}$ und $q := 1-p$ gilt klarerweise $P(Z=0) = P(X=0, Y=0) = \frac{1}{q^2}\,,\ P(Z=1) = p\,(2-p)$.
   Aus $0 = \int\limits_{[Z=0]} X\,dP = P(Z=0)\,\mathbb{E}(X|Z=0)$ folgt $\mathbb{E}(X|Z=0) = 0\,,$ und $P(Z=1)\,\mathbb{E}(X|Z=1) = \int\limits_{[Z=1]} X\,dP = 1\,P(\,(1,0)\,,(1,1)\,) = p$ ergibt $\mathbb{E}(X|Z=1) = \frac{p}{p\,(2-p)} = \frac{1}{2-p}$. Somit gilt $\mathbb{E}(X|Z) = \frac{1}{2-p}\,\mathbb{1}_{[Z=1]}$. Aus Symmetriegründen gilt auch $\mathbb{E}(Y|Z) = \frac{1}{2-p}\,\mathbb{1}_{[Z=1]}$. Somit gilt $\mathbb{E}(X|Z) = \mathbb{E}(Y|Z)$, d.h. die bedingten Erwartungen sind sogar ident und daher nicht unabhängig. ($\mathbb{E}\,[\mathbb{E}(X|Z)\,\mathbb{E}(Y|Z)] = \frac{p\,(2-p)}{(2-p)^2} = \frac{p}{2-p}$, aber $\mathbb{E}\,\mathbb{E}(X|Z)\,\mathbb{E}\,\mathbb{E}(Y|Z) = (\mathbb{E}X)^2 = p^2$.)

3. Man zeige, dass $\mathbb{E}(Y|\mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{A} \cup \mathfrak{C})\,) = \mathbb{E}\,(Y|\mathfrak{A})$ i.A. nicht gilt, wenn nur die σ-Algebren $\mathfrak{S}(Y)$ und $\mathfrak{A}$ unabhängig von der σ-Algebra $\mathfrak{C}$ sind.

   Lösung: Betrachte $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ mit $\Omega := \{1,2,3,4\},\ \mathfrak{S} := \mathfrak{P}(\Omega),$ und $P(\{i\}) = \frac{1}{4}\ i = 1,\ldots,4$, sowie $Y := \mathbb{1}_{\{1,2\}},\ \mathfrak{A} := \{\emptyset, \Omega, \{2,3\}, \{1,4\}\}$ und $\mathfrak{C} := \{\emptyset, \Omega, \{1,3\}, \{2,4\}\}$.

   Dann gilt $\mathfrak{S}(Y) = \{\emptyset, \Omega, \{1,2\}, \{3,4\}\}$, und $\mathfrak{S}(Y)$ sowie $\mathfrak{A}$ sind offensichtlich unabhängig von $\mathfrak{C}$. Aber aus $\mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{A} \cup \mathfrak{C}) = \mathfrak{P}(\Omega)$ folgt klarerweise $\mathbb{E}(Y|\mathfrak{A}_\sigma(\mathfrak{A} \cup \mathfrak{C})\,) = Y$. Andererseits sind auch $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{S}(Y)$ unabhängig voneinander. Daher gilt $\mathbb{E}\,(Y|\mathfrak{A}) = \mathbb{E}Y = \frac{1}{2}$ P–fs.

4. Man bestimme für $(X\,,Y) \sim N(0,0,1,1,\rho)$ die bedingten Dichten und berechne $\mathbb{E}(Y|X)$ und $\mathbb{E}(\sigma_2\,Y + \mu_2|\sigma_1\,X + \mu_1)$ mit $\sigma_i > 0\,,\ i = 1\,,2\,.$
   Hinweis: $\frac{x^2 - 2\,\rho\,x\,y + y^2}{2(1-\rho^2)} = \frac{x^2}{2} + \frac{(y-\rho\,x)^2}{2\,(1-\rho^2)}\,.$

   Lösung:

$$\frac{x^2}{2} + \frac{(y-\rho\,x)^2}{2\,(1-\rho^2)} = \frac{x^2 - \rho^2\,x^2 + y^2 - 2\,\rho\,x\,y + \rho^2\,x^2}{2\,(1-\rho^2)} = \frac{x^2 - 2\,\rho\,x\,y + y^2}{2\,(1-\rho^2)}\,.$$

   Daher gilt $f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi\,(1-\rho^2)}}\,\mathrm{e}^{-\frac{(y-\rho\,x)^2}{2(1-\rho^2)}}$. Da X die Randdichte $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ hat, folgt aus der Multiplikationsregel

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\,(1-\rho^2)}}\,\mathrm{e}^{-\frac{(y-\rho\,x)^2}{2(1-\rho^2)}}\,.$$

   Somit ist Y unter $[X = x]$ bedingt $N(\rho\,x, 1-\rho^2)$-verteilt. Daraus folgt sofort $\mathbb{E}(Y|X) = \rho\,X$. Die Ergebnisse für $X|Y$ sind symmetrisch.

Da $\mathfrak{S}^{-1}(Z_1) = \mathfrak{S}^{-1}(X)$, gilt für $Z_1 := \sigma_1 X + \mu_1$, $Z_2 := \sigma_2 Y + \mu_2$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z_2|Z_1) &= \mathbb{E}(\sigma_2 Y + \mu_2|X) = \sigma_2 \mathbb{E}(Y|X) + \mu_2 \\ &= \rho\,\sigma_2 X + \mu_2 = \frac{\rho\,\sigma_2}{\sigma_1}\,(Z_1 - \mu_1) + \mu_2\,. \end{aligned}$$

5. Man zeige, dass für alle quadratisch integrierbaren Zufallsvariablen X, Y auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ und alle σ-Algebren $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{S}$ gilt $\mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X|\mathfrak{C}))^2 \leq \mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X|\mathfrak{A}))^2$.

   Lösung: Da $\mathbb{E}(X|\mathfrak{C}) - \mathbb{E}(X|\mathfrak{A})$ bezüglich $\mathfrak{C}$ messbar ist, gilt

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X|\mathfrak{C}))\,(\mathbb{E}(X|\mathfrak{C}) - \mathbb{E}(X|\mathfrak{A})) \\ &\quad = \mathbb{E}\,\mathbb{E}(\,(X - \mathbb{E}(X|\mathfrak{C}))\,(\mathbb{E}(X|\mathfrak{C}) - \mathbb{E}(X|\mathfrak{A}))\,|\mathfrak{C}) \\ &\quad = \mathbb{E}[(\mathbb{E}(X|\mathfrak{C}) - \mathbb{E}(X|\mathfrak{A}))\,(\mathbb{E}(X|\mathfrak{C}) - \mathbb{E}(X|\mathfrak{C}))\,] = 0\,. \end{aligned}$$

   Somit gilt $\mathbb{E}[X - \mathbb{E}(X|\mathfrak{A})]^2 = \mathbb{E}[X - \mathbb{E}(X|\mathfrak{C})\,]^2 + \mathbb{E}[\mathbb{E}(X|\mathfrak{C}) - \mathbb{E}(X|\mathfrak{A})]^2$.

6. Man beweise, dass auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ für $X, Y \in \mathcal{L}_2(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ gilt

$$\mathbb{E}(X|Y) = Y\ P\text{-fs} \wedge\ \mathbb{E}(Y|X) = X\ P\text{-fs}\ \Rightarrow\ X = Y\ P\text{-fs}\,.$$

   Beweis: Da Y natürlich $\mathfrak{S}(Y)$-messbar ist, gilt

$$\int Y\,(X - Y)\,dP = \int Y\,(X - \mathbb{E}(X|Y))\,dP = \int X\,Y - \mathbb{E}(X\,Y|Y)\,dP = 0\,.$$

   Ebenso gilt $\int X\,(X - Y)\,dP = 0$. Daraus folgt

$$0 = \int (X - Y)\,(X - Y)\,dP = \int (X - Y)^2\,dP\ \Rightarrow\ X = Y \quad P\text{-fs.}$$

7. Man beweise, dass für integrierbare Zufallsvariable X, Y auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ gilt

$$\mathbb{E}(X|Y) = Y\ P\text{-fs} \wedge\ \mathbb{E}(Y|X) = X\ P\text{-fs}\ \Rightarrow\ X = Y\ P\text{-fs}\,.$$

   Hinweis: Was folgt aus $[Y \leq c] = [X > c, Y \leq c] \cup [X \leq c, Y \leq c]$ für die Integrale von $X - Y$ über diese Bereiche?

   Für alle $c \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} &\int\limits_{[X>c,Y\leq c]} (X - Y)\,dP + \int\limits_{[X\leq c,Y\leq c]} (X - Y)\,dP = \int\limits_{[Y\leq c]} (X - Y)\,dP \\ &\quad = \int\limits_{[Y\leq c]} (\mathbb{E}(X|Y) - Y)\,dP = \int\limits_{[Y\leq c]} (Y - Y)\,dP = 0\,. \end{aligned}$$

Daraus, da auf $[X > c, Y \leq c]$ gilt $X - Y > 0$ und weil auf $[X \leq c, Y > c]$ gilt $Y - X \geq 0$, folgt

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \int\limits_{[X>c, Y \leq c]} (X - Y)\, dP = \int\limits_{[X \leq c, Y \leq c]} (Y - X)\, dP \\
&\leq \int\limits_{[X \leq c, Y \leq c]} (Y - X)\, dP + \int\limits_{[X \leq c, Y > c]} (Y - X)\, dP = \int\limits_{[X \leq c]} (Y - X)\, dP \\
&= \int\limits_{[X \leq c]} (\mathbb{E}(Y|X) - X)\, dP = \int\limits_{[X \leq c]} (X - X)\, dP = 0\,,
\end{aligned}
$$

d.h. $0 = \int\limits_{[X>c, Y \leq c]} (X - Y)\, dP$. Daraus folgt schließlich für alle $n \in \mathbb{N}$

$$
0 = \int\limits_{[X>c, Y \leq c]} (X - Y)\, dP \geq \int\limits_{\left[X > c + \frac{1}{n}, Y \leq c\right]} \frac{1}{n}\, dP = \frac{1}{n} P\left(X > c + \frac{1}{n}, Y \leq c\right)\,.
$$

Somit gilt $P\left(X > c + \frac{1}{n}, Y \leq c\right) = 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$, und das impliziert

$$
P(X > c, Y \leq c) \leq \sum_n P\left(X > c + \frac{1}{n}, Y \leq c\right) = 0 \quad \forall\, c \in \mathbb{R}\,.
$$

Daraus folgt $P(X > Y) \leq \sum\limits_{q \in \mathbb{Q}} P(X > q, Y \leq q) = 0$. Aus Symmetriegründen gilt auch $P(Y > X) = 0 \;\Rightarrow\; P(X = Y) = 1$.