10. Übung aus Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie WS 2015

1. Sind $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig, $B_{\frac{1}{2}}$- verteilte Zufallsvariable, so nennt man eine Folge $(X_{i+1}(\omega), \ldots, X_{i+k}(\omega))$ einen *Run* der Länge k, wenn $i = 0$ oder $X_i(\omega) \neq X_{i+1}(\omega)$, wenn weiters $X_{i+1}(\omega) = \ldots = X_{i+k}(\omega)$ und wenn $i + k = n$ oder $X_{i+k}(\omega) \neq X_{i+k+1}(\omega)$. Man berechne den Erwartungswert und die Varianz von R, der Anzahl der *Runs* in $X_1, \ldots, X_n$. Außerdem versuche man zu beurteilen, ob die Folge 1010110100101100010110010101100010101001100101010 0 durch das Werfen einer Münze entstanden ist, oder, ob es sich eher um eine willkürlich hingeschriebene Folge handelt.

2. Ein Würfel wird solange geworfen bis zum 3-ten Mal eine 6 erscheint. Die Anzahl der notwendigen Würfe soll erraten werden. Wie würden Sie tippen wenn
   (a) nur ein richtiger Tipp honoriert wird?
   (b) ein Pönale im Ausmaß der absoluten Differenz zwischen Ihrem Tipp und dem tatsächlichen Ausgang zu bezahlen ist?
   (c) ein Pönale im Ausmaß des Quadrats zwischen Ausgang und Tipp zu zahlen ist?

3. Man zeige, dass für unabhängige Zufallsvariable $X_n \sim Ex_{\tau_n}$ gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\tau_n} = \infty \ \Rightarrow \ S := \sum_{n=1}^{\infty} X_n = \infty \quad P\text{–fs.}$$

4. Ein Spieler soll auf die möglichen Werte $x_1, \ldots, x_m$ einer diskreten Zufallsvariablen X, die mit den Wahrscheinlichkeiten $(p_1, \ldots, p_m)$ angenommen werden wetten. Dabei beginnt er mit einem Startkapital $S_0 > 0$, und er kann Anteile $0 \leq b_i \leq 1\,, 1 \leq i \leq m\,, \ \sum\limits_{i=1}^{m} b_i = 1$ dieses Kapitals auf die einzelnen Werte setzen. Für den richtigen Tipp bekommt er das m-fache seines Einsatzes ausbezahlt, die Einsätze, die er auf andere Ausgänge gesetzt hat, gehen verloren. Bezeichnet X_1 den Ausgang des 1-ten Spiels, so verfügt er nach diesem Spiel über ein Kapital $S_1 = m\, b(X_1)\, S_0$, das er wieder im Verhältnis $b_1 : b_2 : \ldots : b_m$ aufteilen kann. Dieser Vorgang wird n-mal wiederholt.
   (a) Wie groß ist das Kapital S_n des Spielers nach n Runden?
   (b) Man bestimme $\lim\limits_{n} \frac{1}{n} \log S_n$.

(c) Man bestimme $\lim_n \frac{1}{n} \log S_n$, wenn der Spieler seine Anteile gemäß den Wahrscheinlichkeiten wählt, also $b_i = p_i\,,\ \forall\ 1 \le i \le m$.

(d) Welche Aufteilung ist optimal? Vergleichen Sie die Punkte (b) und (c) in Hinblick auf das Ergebnis von Bsp. 6. aus Übung 7.

(e) Wie sollte man aufteilen, um $\mathbb{E}S_1$ zu maximieren?

5. Gilt ein Gesetz der großen Zahlen für die unabhängigen Zufallsvariablen X_n mit $X_1 \equiv 0$ und $P(X_n = n) = P(X_n = -n) = \dfrac{1}{2n \log n}$ sowie $P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n \log n}$ für $n \ge 2$?

6. Man zeige, dass für eine Folge von unabhängigen Ereignissen A_n mit $P(A_n) = \frac{1}{n}$ die Summen $S_n := \sum\limits_{i=2}^{n} \frac{\mathbb{1}_{A_i} - \frac{1}{i}}{\log i}$ P–fs konvergieren. Damit beweise man $\frac{1}{\log n} \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\mathbb{1}_{A_i} - \frac{1}{i}\right) \to 0$ P–fs und zeige schließlich $\frac{1}{\log n} \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A_i} \to 1$ P–fs.

7. Man berechne für eine Folge unabhängig, identisch verteilter Zufallsvariabler $X_n \in \mathcal{L}_2(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ den Erwartungswert der Stichprobenvarianz $S_n^2 := \frac{1}{n-1} \sum\limits_{i=1}^{n} \left(X_i - \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} X_i \right)^2$ und zeige weiters, dass gilt $\lim_n S_n^2 = \operatorname{Var} X_1 \quad P$–fs.